RAPPORTER FRÅN VÄXJÖ UNIVERSITET
Matematik, naturvetenskap och teknik
Reports from Växjö University - Mathematics, natural sciences and technology
Nr 3 2005

Spiel mit Zahlen – Kampf mit Zahlen?

Das mittelalterliche Zahlenkampfspiel Rithmomachie in seiner Regensburger Fassung um 1090

Alfred Holl

ISSN: 1404-045X
ISBN: 91-486-0

Växjö
University

ZUSAMMENFASSUNG

Das Zahlenkampfspiel steht in der Tradition von *De institutione arithmetica* des spätantiken Gelehrten und Staatsmannes Boethius, die über Nikomachos von Gerasa auf neupythagoreische Zahlenlehren zurückgeht. Seine Erfindung ist um 1030 anzusetzen. Dann findet man zunächst Bearbeitungen aus Süddeutschland; die Fassung eines nicht genauer identifizierbaren Mönchs des Klosters St. Emmeram um 1090 gehört zu den ältesten. Später erfolgte eine Verbreitung über das heutige Belgien nach Frankreich und England; die erste deutschsprachige Version stammt von Abraham Riese, dem Sohn des Adam, aus dem Jahre 1562. Anfang des 17. Jahrhunderts zog die Rithmomachie in ihrer Wertschätzung durch den Adel mit dem Schachspiel gleich. Danach geriet sie schnell in Vergessenheit. Sie wurde erst im 19. Jahrhundert von Mathematikhistorikern wieder entdeckt.

Die Rithmomachie ist ein Brettspiel. Die Spielfeldgröße wurde im Laufe der Zeit auf ein doppeltes Schachbrett mit 8 mal 16 Feldern standardisiert. Die Zahlenwerte der Spielsteine errechnen sich unter Verwendung von speziellen, seit der Antike bekannten Proportionen, die auch für die Charakterisierung von Tonverhältnissen in der Musik und Längenverhältnissen in Geometrie (Architektur) und Astronomie bedeutsam sind (die Arithmetik bildete zusammen mit diesen drei Disziplinen das Quadrivium der *artes liberales*). Die Spielsteine werden in drei Gruppen zu je acht unterteilt, denen jeweils eine andere Proportion zugrunde liegt. Die Zugweite der Spielsteine hängt davon ab, zu welcher Gruppe sie gehören. Wie in anderen Brettspielen auch können eigene Steine gegnerische schlagen; die Regeln dafür basieren beim Regensburger Anonymus auf der Addition und Multiplikation, bei späteren Erweiterungen auf allen vier Grundrechnungsarten. Um den Sieg zu erringen, müssen drei Spielsteine nebeneinander gesetzt werden, deren Werte bestimmten Mittelwertbedingungen genügen.

Eine kulturhistorische Perspektive verlangt, über eine bloße Diskussion von mathematischem Inhalt, Spielstrategien und Siegbedingungen sowie Möglichkeiten multimedialer Präsentation hinauszugehen und das Spiel in seinem historischen Kontext zu betrachten, um das in ihm liegende Erkenntnispotential voll auszuschöpfen.

Die Rithmomachie verfügt über ein breites Zweckpotential, dessen Facetten in unterschiedlichen kulturellen Kontexten deutlich werden. Parallel zur jeweiligen Art, Mathematik zu betreiben, konnte dem Spiel eine jeweils eigene Funktionalität zugeordnet werden, ohne sein Prinzip zu verändern. Im Mitteleuropa des 11. und 12. Jahrhunderts hatten Zahlen zunächst keinen mathematischen Eigenwert im heutigen Sinne; sie waren nicht primär Rechengrößen. Daher diente das Zahlenkampfspiel anfangs nur der

Gewöhnung an die Proportionenlehre des Boethius und nicht der Einübung von Rechenfertigkeit. Effektive und ökonomische schriftliche Rechenmethoden im heutigen Sinne konnten sich wegen der ineffizienten Notation der römischen Zahlen noch nicht entwickeln. Deshalb war es auch weder sinnvoll noch üblich, das kleine Einmaleins auswendig zu lernen. Die Interpretation der Funktionalität des Spiels hat sich vermutlich schon im ausgehenden Mittelalter gewandelt, als die Proportionenlehre an Wichtigkeit verlor und die schriftliche Rechenfertigkeit an Stellenwert gewann, wie sich an Spielbrettdarstellungen mit arabischen Zahlen zeigt.

VORWORT

Der vorliegende Text ist das durch Hinweise auf Quellen ergänzte Manuskript eines Vortrages, gehalten am 26.01.2005 im Gesprächskreis Mittelalter des *Forum Mittelalter* der Universität Regensburg (www.forum-mittelalter.org) und am 10.05.2005 im Mathematisch-physikalischen Kolloquium der Georg-Simon-Ohm-Fachhochschule Nürnberg (www.fh-nuernberg.de).

Es werden keine tiefer gehenden mathematischen Konzepte vorausgesetzt.

Eine moderne Ausgabe des Spiels mit ausführlicher Anleitung ist erhältlich bei der Holzspielwarenfabrik *Heros* in D-93460 Lam (www.heros-toys.de).

Die Idee zu diesem Thema und viele kulturhistorische Anregungen, ohne die diese Untersuchung nicht entstanden wäre, verdanke ich Frau Prof. Dr. Edith Feistner, Universität Regensburg, die das Zahlenkampfspiel für Regensburg entdeckt hat.

Alfred Holl

Fachbereich Informatik, Georg-Simon-Ohm-Fachhochschule Nürnberg, Deutschland

Matematiska och systemtekniska institutionen, Universität Växjö, Schweden

Alfred.Holl@fh-nuernberg.de

INHALT

1. EINFÜHRUNG

1.1 Vorbemerkungen

Ein vordergründiger Blick auf das Zahlenkampfspiel, die Rithmomachie, – multimedial, die mathematischen Möglichkeiten maximierend, Spielstrategien und Siegbedingungen kalkulierend – wird ihm nicht gerecht. Dieses Spiel eröffnet erst dann sein in ihm liegendes Erkenntnispotential und wird zu einem wirklich spannenden Forschungsgegenstand, wenn man sich auf dessen kulturhistorische Dimension einlässt. In diesem Vortrag wird nicht aus heutiger Perspektive gefragt: Wie wenig von dem, was wir heute in der Mathematik beherrschen, konnte man damals? Sondern die jeweilige Art, Mathematik zu betreiben, wird vielmehr als kultur- und bewusstseinsgeschichtliches Phänomen verstanden. Am Anfang des 11. Jahrhunderts schuf es die Voraussetzungen und Bedingungen, vor deren Hintergrund die Entstehung der Rithmomachie zu betrachten ist.

Die Schreibweisen schwanken zwischen *Rithmomachie* und *Rithmimachie*, wobei zudem noch *rh* mit *r* und *th* mit *t* wechseln kann. Ein Grund dafür liegt in der auf den ersten Blick unklaren Etymologie, auf die ich später zu sprechen kommen werde (3.4).

In der Einführung werde ich nur wenige enzyklopädische Daten nennen

- zur Geschichte der Rithmomachie
- zur Mathematik in Regensburg im Mittelalter und
- zur Sammlung des Regensburger Anonymus

um anschließend im zweiten Teil das Zahlenkampfspiel mit seinem mathematischen Hintergrund anhand der Regensburger Fassung ausführlich zu besprechen.

Im dritten Teil werde ich einen Blick auf den didaktischen Wert der Rithmomachie im Mittelalter werfen und untersuchen, was man damals mit ihr lernen wollte und konnte. Hierzu ist vor allem ihr Bezug zur Rechenfertigkeit zu thematisieren.

Nun also zur Geschichte der Rithmomachie.

1.2 Geschichte der Rithmomachie

Die Rithmomachie steht in der Tradition von *De institutione arithmetica* von Boethius (< 500), die eine lateinische Übersetzung der *Ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή* des Nikomachos von Gerasa darstellt (~100), die ihrerseits auf neupythagoreische Zahlenlehren zurückgeht (nicht: Zahlentheorie, wie man teilweise in der Literatur findet). Inwieweit die Tradition durchgängig bis Pythagoras selbst (ins 6. Jahrhundert v. Chr.) zurückreicht, ist nicht zu klären; in einzelnen Details, z.B. bei Mittelwerten, ist dies sicher der Fall.

Ein erstes Spiel, das u.a. mit dem Namen *Rithmomachie* belegt wurde (ohne eine zu sein), tritt um 970 auf: Ein Würfelspiel (*de alea* oder *alea regularis*) des Bischofs Wibold von Cambrai (südlich von Lille in Nordfrankreich). Wie der Name schon sagt, handelte es sich um ein Würfelspiel; es zeigte Harmonien in Form von Tugenden auf (Folkerts 1989: 333). Manitius (1965: II 338, 340, 343) unterscheidet es leider nicht von der eigentlichen Rithmomachie.

Auch wenn die Rithmomachie im Mittelalter stellenweise als das Spiel des Pythagoras, des Boethius oder des Gerbert (Papst Silvester II.) bezeichnet wird, liegt dessen Erfindung erst kurz nach der Jahrtausendwende und ist sogar recht gut datierbar (Folkerts 1989: 333).

Nach Arno Borsts grundlegender Forschungsarbeit zur Rithmomachie 1986 (referiert von Folkerts 1989) liegt der Ausgangspunkt wohl in einem Wettkampf der Gelehrsamkeit zwischen den Domschulen von Worms und Würzburg um 1030 (Folkerts 1989: 335).

In der Zeit des Domschulmeisters Pernulf (1022-1042) wurde die Abhandlung *De aggregatione naturalium numerorum* eines Würzburger Anonymus verbreitet (Edition 1895 von Maximilian Curtze aus dem Clm 14836 aus St. Emmeram, aber nicht dort geschrieben). Die Abhandlung enthält – in Fortführung von Überlegungen des Boethius – eine Formel zur Verkettung von Proportionen, auf die ich im zweiten Teil meines Vortrags (2.1.2) eingehen werde (Folkerts 1989: 334).

Der älteste Zahlenkampftext beruht auf dieser Schrift (Folkerts 1989: 334). „Alle Abschriften davon bezeichnen als Erfinder des Spiels einen Würzburger Geistlichen *quidam ex clero Wirciburgensi* … Nur eine Handschrift [Codex Parisinus 7377 C] nennt in einem Zusatz seinen Namen: Asilo. Dieser könnte mit dem Domschüler Adalbero [Graf von Lambach] identisch sein, der später [1045, unter Kaiser Heinrich III.] Bischof von Würzburg wurde“ (Folkerts 1989: 335; Peiper 1880: 215). Die Person lässt sich aber leider nicht genauer identifizieren.

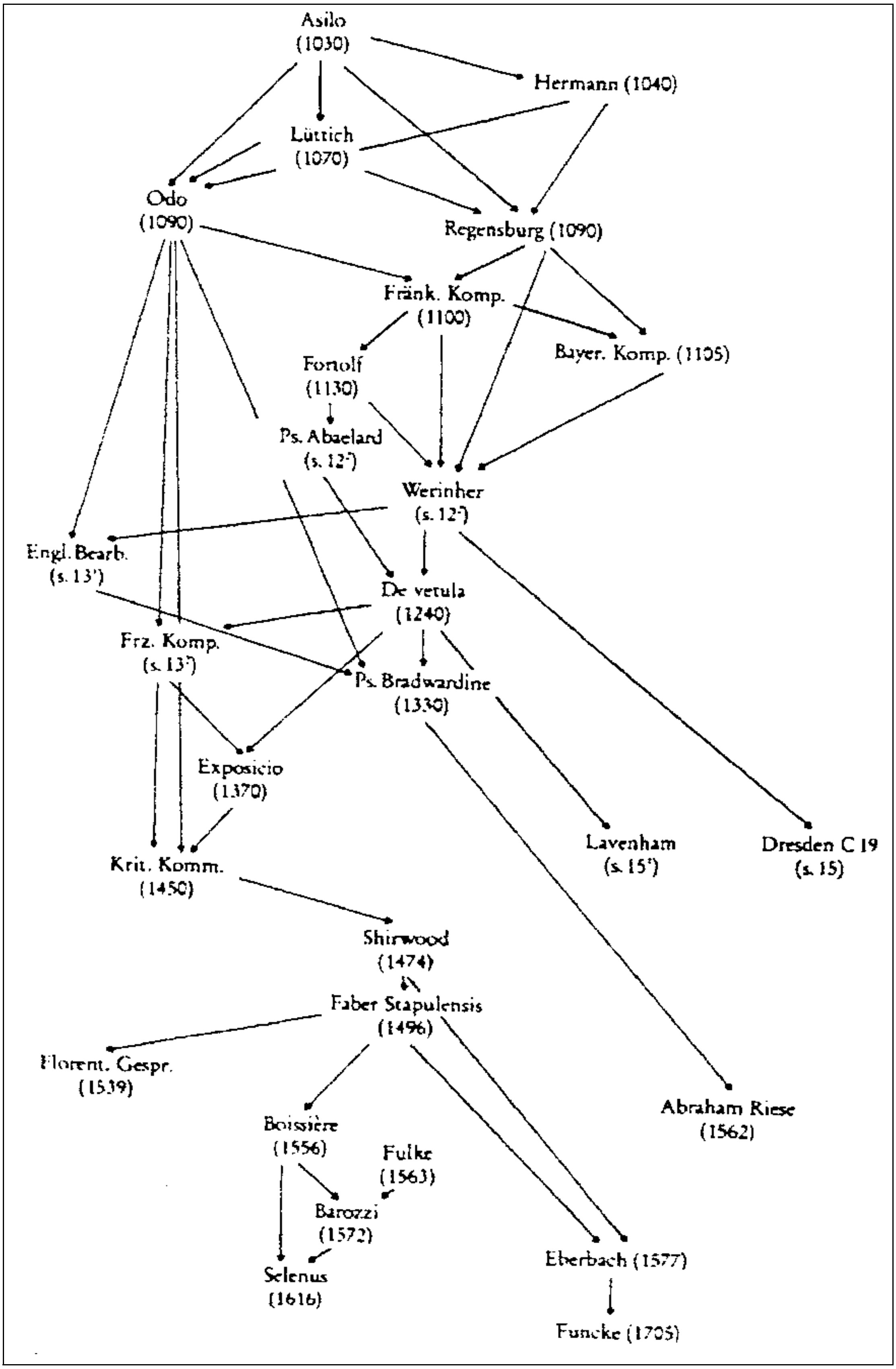


Abb. 1: Zeitliche Übersicht: Beschreibungen der Rithmomachie (Folkerts 1989: 336)

Für die Erfindung des Spiels im 11. Jahrhundert spricht auch, dass bis zum Ende des 12. Jahrhunderts noch Verbesserungen und Verfeinerungen am Regelapparat vorgenommen wurden: „Asilos Entwurf war noch nicht ausgereift; seine Angaben über Spielbrett, Felder, Aufstellung und Gangart der Steine sind noch undeutlich. Auch der Name *Rithmimachie* begegnet noch nicht; das Spiel wird vielmehr als *conflictus* oder *altercatio* bezeichnet“ (Folkerts 1989: 335).

In der zeitlichen Übersicht (Abb. 1) sehen wir zunächst Bearbeitungen des Spiels aus Süddeutschland: u.a. von Hermann Contractus von Reichenau um 1040 und von einem **Regensburger Anonymus (RA)** um 1090, der uns hier interessiert.

„War es ursprünglich im süddeutschen Raum beheimatet und daneben auch im französisch-belgischen Gebiet bekannt, so lassen sich seit dem 13. Jahrhundert viele Bearbeitungen aus dem französischen und vor allem dem englischen Raum nachweisen. Im 14. und 15. Jahrhundert wird England zum Zentrum der Rithmimachie. Aus der frühen Neuzeit gibt es gedruckte Fassungen, die von italienischen, französischen und deutschen Bearbeitern stammen“ (Folkerts 1989: 333). Die erste deutschsprachige Fassung stammt von Abraham Riese, dem Sohn des Adam, 1562 (Folkerts 1989: 336).

Die Rithmomachie wurde über einen Zeitraum von gut 600 Jahren gespielt, bevor sie „sehr plötzlich von der Bildfläche verschwand“ (Folkerts 1989: 331). „Schon im 17. Jahrhundert war das Spiel in Vergessenheit geraten“ (Folkerts 1989: 337). Wir finden noch eine sehr späte Bearbeitung von 1705. Folkerts vermutet Konkurrenz mit der neuen Infinitesimalmathematik (Folkerts 1989: 337).

Es gab aber schon von Anfang an eine Konkurrenz, gegen die die Rithmomachie lange erfolgreich bestand: Das Schachspiel, das, vom 11. Jahrhundert an bekannt, „zunächst in höfischen Kreisen gespielt wurde, setzte sich seit etwa 1300 in allen Volksschichten durch“ (Folkerts 1989: 331).

Das Zahlenkampfspiel blieb vergessen, bis es im 19. Jahrhundert von Mathematikhistorikern wieder entdeckt wurde (Folkerts 1989: 337; Cantor 1880 I, cf. Cantor 1922: I 580, 851, 886; Friedlein 1864: 326-327; Peiper 1880; Wappler 1892).

1.3 Bezug Regensburgs zur Mathematik im Mittelalter

Warum ist es überhaupt sinnvoll, besonders die Fassung des Regensburger Anonymus zu diskutieren? Erstens ist sie eine der ältesten Beschreibungen der

Rithmomachie – nur ein halbes Jahrhundert nach Asilo von Würzburg – und zweitens hat Regensburg reichlich Bezüge zur mittelalterlichen Mathematik. Wir haben es also nicht mit einem isolierten Dokument zu tun.

Regensburg hat mit seinen Benediktinerklöstern St. Emmeram und Prüfening – im weiteren Umkreis Reichenbach – wesentliche Akzente gesetzt, was der Mathematikhistoriker Kurt Vogel – natürlich nicht nur für Regensburg allein, aber eben auch für Regensburg – 1970 im Titel eines Vortrags (Vogel 1973) unterstrichen hat, der da lautet:

Der Donauraum, die Wiege mathematischer Studien in Deutschland.

Lassen Sie mich nur wenige wesentliche Bezüge stichpunkt- und streiflichtartig herausgreifen:

- Otloh von St. Emmeram (~1000-~1070): Einmaleinstafel; Apices (westarabische Ziffern)
- Wilhelm von Hirsau (~1030-1091): zunächst St. Emmeram;
  Sphära; Kalenderrechnung (Computus)
- Frater Sigsboto (~1165): Kloster Prüfening; Person ist fraglich;
  arithmetische, geometrische und astronomische Schriften
- Albertus Magnus (1200-1280): 1260 Bischof von Regensburg;
  vieles nicht überliefert; *Primus Euclidis cum commento Alberti*
- Fridericus Gerhart (~1400-1465): St. Emmeram; Schriften 1455-1464;
  Algorismus Ratisbonensis mit (auch kaufmännischer) Aufgabensammlung *Practica*; findet Niederschlag (hauptsächlich in Franken und Sachsen) in Rechenbüchern.
  Ein Algorismus war im Mittelalter ein Rechenbuch mit arabischer Zahldarstellung; der Name des Mathematikers Al-Chwarizmi wurde damals als *Algorismus* latinisiert; heute bedeutet *Algorithmus* eine 'Verarbeitungsvorschrift'.
- Matthes Roritzer (?-1495): ab 1480 Dombaumeister in Regensburg;
  Von der Fialen Gerechtigkeit; Geometria deutsch (9 Aufgaben, volkssprachlich)
- Andreas Alexander (~1465-nach 1504): aus Regensburg; später Köln und Leipzig;
  teilweise deutsche Übersetzung von Al-Chwarizmis Algebra
  Mathemalogium super novam et veterem loycam Aristotelis, 1504;
  ed. *Perspectiva = rationes visus in radiationibus ac lineis visualibus* (Johannes Pisanus = John Pecham)
- Astronomische Forschungen in den Klöstern Prüfening und Reichenbach

1.4 Die Sammlung des Regensburger Anonymus

1.4.1 Die Sammlung des Regensburger Anonymus: Herkunft

Der Text ist in vier Handschriften überliefert, deren älteste um 1200 im Benediktinerkloster Ilmmünster entstand. Die anderen drei Handschriften sind wesentlich jünger, um 1500 (Borst 1989: 290-292, 298-299, 316):

- I: Biblioteca Apostolica Vaticana, Codex latinus 3101
  1077 Benedikt von Ilmmünster; Einschub frühestes 12. Jahrhundert (Regensburger Anonymus)
- D: Sächsische Landesbibliothek Dresden, C 80
  1480-1490 mit Kommentaren Johann Widmanns
- D*: Universitätsbibliothek Düsseldorf, F 13
  1510, vermutlich von einer Vorlage des 13. Jahrhunderts kopiert
- W: Österreichische Nationalbibliothek Wien, 5216
  Ende 15. Jahrhundert, kopiert von der gleichen Vorlage wie D

Leider stammt keine der Handschriften aus Regensburg. Wir wissen also nicht absolut sicher, ob die hier zu besprechende Fassung tatsächlich in Regensburg erstellt wurde, wenngleich diese Hypothese doch sehr wahrscheinlich ist.

Arno Borst, auf den sie zurückgeht, stützt sie auf Kontakte Otlohs von St. Emmeram zum Hof des Würzburger Bischofs und zum Kloster Reichenau. Im Detail führt er folgende Indizien an (Borst 1989: 135):

- „Otloh hatte vor seinem Eintritt in St. Emmeram (1032) am Hof des Würzburger Bischofs gearbeitet und dort wohl auch Asilo kennengelernt."
- „Nach 1054 wird Otloh wiederholt von Heinrich von Reichenau besucht, einem Pilgergefährten des Bruders von Hermann dem Lahmen."
- „Vielleicht brachte Otloh von seinen Reisen auch den auswärtigen Codex [Clm 14836] mit, in dem neben zahlreichen arithmetischen Texten zwei Grundschriften zum Zahlenkampf standen, das Gutachten Hermanns und der Rundbrief Asilos."

„Weniger unanfechtbar als die Lokalisierung nach Regensburg gelingt die Datierung" (Borst 1989: 140). Die Zeit um 1090 ergibt sich aus seiner detaillierten Diskussion textstruktureller und inhaltlicher Kriterien. Kurz zusammengefasst lautet Borsts Argumentation, dass der Regensburger Anonymus Elemente der älteren Fassungen von Asilo, von Hermann Contractus, vom Lütticher Anonymus sowie dem Musikdialog Wilhelms von

Hirsau verwendet, aber die Version des Odo von Tournai und spätere nicht kennt (Borst 1989: 140-149). Die Datierung spricht daher für einen Schüler Otlohs von St. Emmeram (Borst 1989: 140).

1.4.2 Die Sammlung des Regensburger Anonymus: Aufbau

Nun zu Struktur und Inhalt der Sammlung des Regensburger Anonymus.

Wir finden einen logisch stringenten Aufbau, der von den mathematischen Grundlagen ausgehend die Durchführung des Spiels erläutert und Beispiele nennt:

RA 1	Proportionen, Herkunft des Spiels
RA 2	Spielfeld
RA 3-5	Spielsteine: 3 *multiplices*; 4 *superparticulares*; 5 *superpartientes*
RA 6	Spielzüge
RA 7-9	Schlagen: 7 *congressus, insidiae, eruptio*; 8 Pyramide; 9 Ausnahme: *obsidio*
	(spätere Terminologie nach Folkerts 1989: 332)
RA 10-14	Siegbedingungen
RA 15	Ergänzung zu 1
RA 16-20	Beispiele: Ungerade Seite schlägt gerade Seite: *eruptio*
RA 21-23	Beispiele: Gerade Seite schlägt ungerade Seite: *eruptio*
Anhang	Spielfeld, arithmetische Folgen, griechische Alphabetzahlen und Zahlnamen

An dieser Struktur wird sich die Gliederung des zweiten Teils meines Vortrags orientieren.

Darin geht es um die Proportionen, die der Berechnung der Spielsteinwerte zugrunde liegen, das Spielfeld, die Aufstellung der Spielsteine und deren Züge. Wie in anderen Brettspielen auch können eigene Steine gegnerische schlagen und es gibt spezielle Siegbedingungen.

2. ERLÄUTERUNGEN ZUR RITHMOMACHIE ANHAND DER REGENSBURGER FASSUNG

Die Aufstellung von 1496 (Abb. 2) ist für uns besser lesbar als die des Regensburger Anonymus, da sie keine römischen Zahlen enthält.

Sie sehen die Zahlen von 2 bis 9 auf einer geraden und einer ungeraden Seite, Sie sehen deren Quadrate,

- teilweise auf der geraden Seite zweimal: 25, 81
- teilweise nur auf der geraden Seite: 4
- teilweise auf beiden Seiten: 16, 36, 64;   9, 25, 49, 81

Sie sehen Quadratzahlen nur auf einer Seite und ohne Grundzahl: 169, 289; 121, 225, 361.

Schließlich sehen Sie noch Zahlen, deren Auswahlgründe sich auf den ersten Blick überhaupt nicht erschließen: 6, 20, 42, 72 und 12, 30, 56, 90.

Sie sehen nicht die 1!

„Dass die 1 fehlt, ist nicht verwunderlich, da die 1 im antiken – genauer gesagt: pythagoreischen – Sinn keine Zahl ist, sondern die Einheit, aus der die Zahlen erzeugt werden. Dies weist schon auf die Denkweise hin, die dem Spiel zugrunde liegt: Es steht in der pythagoreischen Tradition, die in der griechischen Mathematik immer präsent war, etwa auch in Euklids Elementen (vor allem in Buch 9) niedergelegt ist, und in der Spätantike insbesondere durch Nikomachos aufgezeichnet wurde“ (Folkerts 1989: 331-332).

2.1 Proportionen und Berechnung der Spielsteinwerte

Um das Rätsel der Festlegung der Spielsteinwerte zu lösen, müssen wir uns mit der (neu-)pythagoreischen Proportionenlehre (λόγος ‘Verhältnis’) befassen.

Sie wird über folgende Texte tradiert:

~600 Isidor von Sevilla *Etymologiae / Origenes* III,6,5-8
~550 Cassiodor *Institutiones (divinarum et saecularium literarum)*
~500 Boethius *De institutione arithmetica*
~450 Martianus Capella *Nuptiae (philologiae et mercurii)*
~100 Nikomachos *’Αριθμητικὴ εἰσαγωγή*

Die Proportionsbezeichnungen stehen ebenso für **Zahlenverhältnisse** wie für die **Zahlen**, die durch Multiplikation mit dem Proportionalitätsfaktor generiert werden.

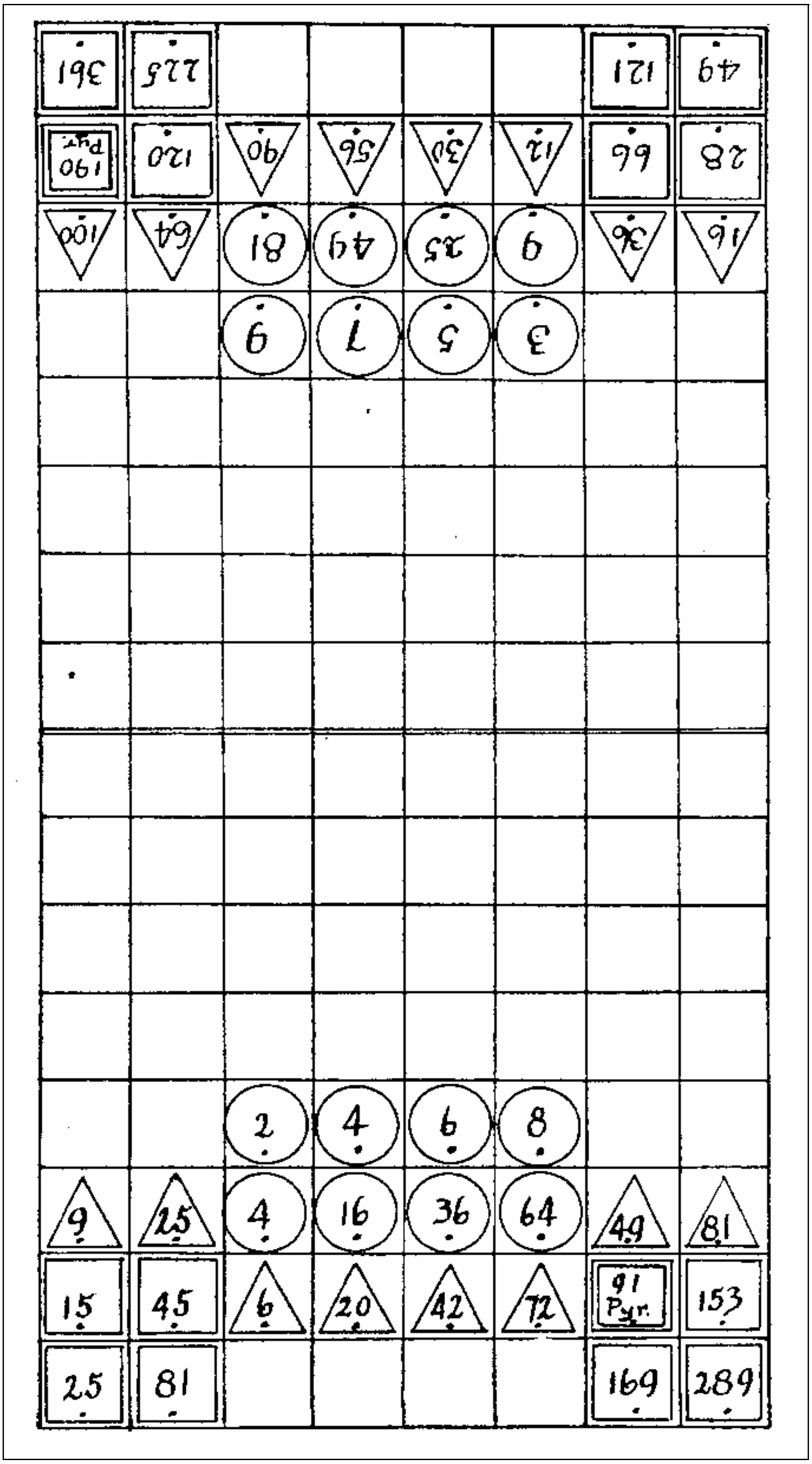


Abb. 2: Aufstellung nach Jacobus Faber Stapulensis (Jacques le Fèvre d'Étaples) 1496 (Smith, Eaton 1911: 77)

2.1.1 Die fünf Proportionstypen nach Boethius, Nikomachos, Martianus Capella

multiplex – πολλαπλάσιος (Nikom. arithm. 1,18)**, ἡ πολλαπλασιότης** (Iambl.)
ein ganzzahliges Vielfaches der 1: n
Beispiel: quadruplus – τετραπλοῦς
Zahlgenerierung: $1 \cdot 4 = 4$; $4 \cdot 4 = 16$

superparticularis – ἐπιμόριος (Nikom. arithm. 1,19)**, ἡ ἐπιμοριότης** (Iambl.)
ein Ganzes und ein Teil: $(n+1)/n = 1 + 1/n$
3/2, 4/3, 5/4, 6/5, 7/6, 8/7, 9/8 Nenner bestimmt den Terminus
Zinsrechnung, Musik (Frequenzverhältnis Quint : Tonika, große Terz : Tonika)
Beispiel: sesquiquartus, superquartus – ἐπιτέταρτος
Proportion: $(4+1)/4 = 5/4$
Zahlgenerierung: $16 \cdot 5/4 = 20$; $20 \cdot 5/4 = 25$ (Ausgangszahl durch 4 teilbar)

superpartiens – ἐπιμερής (Nikom. arithm. 1,20)**, ἡ ἐπιμερότης** (Iambl.)
in der Literatur oft missverständlich: $(n+m)n$, $1<m<n$ (Folkerts 1989: 332)
ein Ganzes und (alle - ein) Teil: $(2n+1)/(n+1) = 1 + n/(n+1) = 2 - 1/(n+1)$
5/3, 7/4, 9/5, 11/6, 13/7, 15/8, 17/9 Zähler bestimmt den Terminus
Beispiel:
superquadripartiens, superquadriquintus – ἐπιτετραμερής, ἐπιτετράπεμπτος
Proportion: $1 + 4/(4+1) = 1 + 4/5 = 9/5 = 2 - 1/5$
Zahlgenerierung: $25 \cdot 9/5 = 45$; $45 \cdot 9/5 = 81$ (Ausgangszahl durch 5 teilbar)

Sonderfälle bei Nikomachos (arithm. 1,23), die Boethius nicht nennt:
ἐπιτρί-πεμπτος 1 3/5, ἐπιτετρα-έβδομος 1 4/7, ἐπιπεντ-ένατος 1 5/9

multiplex superparticularis – πολλαπλασι-επιμόριος (Nikom. arithm. 1,22)
mehrere Ganze und ein Teil
Beispiel: triplex sesquiquartus $1 + 1 + 1 + ¼$

multiplex superpartiens – πολλαπλασι-επιμερής (Nikom. arithm. 1,23)

mehrere Ganze und (alle - ein) Teil

Beispiel: triplex superquadripartiens 1 + 1 + 1 + 4/5

2.1.2 Verkettung von Proportionen

Für die Konstruktion der Spielsteinwerte der Rithmomachie werden nun Verkettungen der ersten drei Proportionstypen gebildet. Der Ausgangspunkt ist stets die 1.

Beispiel: quadruplex, sesquiquartus, superquadripartiens

1. multiplex:	quadruplus	$1 \cdot 4 = 4$
2. multiplex:	quadruplus	$4 \cdot 4 = 16$
1. superparticularis:	sesquiquartus	$16 \cdot 5/4 = 20$
2. superparticularis:	sesquiquartus	$20 \cdot 5/4 = 25$
1. superpartiens:	superquadripartiens	$25 \cdot 9/5 = 45$
2. superpartiens:	superquadripartiens	$45 \cdot 9/5 = 81$

Nach diesem Schema lassen sich alle Spielsteinwerte ableiten (Tab. 2-4). Jeder Spieler hat vier solche Sequenzen, also 24 Steine, 8 *multiplices*, 8 *superparticulares* und 8 *superpartientes*.

Folkerts sagt hierzu: „Das wesentlich Neue ist also der Schritt von den Paaren natürlicher Zahlen (Proportionen) hin zu einer Reihe natürlicher Zahlen, deren Elemente durch Proportionen gebildet werden“ (Folkerts 1989: 334).

Das ist nur in Bezug auf den *superpartiens* korrekt. Die Verkettung zweier *multiplices* und zweier *superparticulares* findet sich schon bei Boethius (arithm. 2,2) und Nikomachos (arithm. 2,3-4) in Gestalt von Matrixdarstellungen, die horizontal die *multiplices* aufreihen und vertikal die *superparticulares*. Man gehe zwei nach rechts und zwei nach unten und schon hat man zwei Drittel obiger Rithmomachie-Verkettung. Der Erfinder der Rithmomachie denkt also nicht absolut neu, sondern nur weiter.

1	4	16	64	256	1024
	5	20	80	320	1280
		25	100	400	1600
			125	500	2000
				625	2500
					3125

Tab. 1: Verkettung der *numeri multiplices* und *numeri superparticulares* bei Boethius

Name der Proportion	Grund-zahl	1.multi-plex	2. multiplex	
mehrfach	1	n	n^2	
duplus διπλοῦς, -πλάσιος	1	2	2^2	4
triplus τριπλοῦς, -πλάσιος	1	3	3^2	9
quadruplus τετραπλοῦς, -πλάσιος	1	4	4^2	16
quincuplus πενταπλοῦς, -πλάσιος	1	5	5^2	25
sescuplus ἑξαπλοῦς, -πλάσιος	1	6	6^2	36
septuplus ἑπτάπλους, -πλάσιος	1	7	7^2	49
octuplus ὀκταπλοῦς, -πλάσιος	1	8	8^2	64
nonuplus ἐννεαπλοῦς, -πλάσιος	1	9	9^2	81

Tab. 2: Verkettung der *numeri multiplices*

Name der Proportion	Faktor	1.multi plex	2. multiplex		1. numerus superparticularis		2. numerus superparticularis	
überteilig	$(n+1)/n$ $= 1+1/n$	n	n^2		$n^2(n+1)/n$ $= n(n+1)$		$n(n+1)^2/n$ $= (n+1)^2$	
sesqu(i)alter ἡμιόλιος	3/2	2	2^2	4	4·3/2	6	6·3/2	9
sesquitertius supertertius ἐπίτριτος	4/3	3	3^2	9	9·4/3	12	12·4/3	16
sesquiquartus superquartus ἐπιτέταρτος	5/4	4	4^2	16	16·5/4	20	20·5/4	25
sesquiquintus superquintus ἐπίπεμπτος	6/5	5	5^2	25	25·6/5	30	30·6/5	36
sesquisextus supersextus ἔφεκτος	7/6	6	6^2	36	36·7/6	42	42·7/6	49
sesquiseptimus superseptimus ἐφέβδομος	8/7	7	7^2	49	49·8/7	56	56·8/7	64
sesquioctavus superoctavus ἐπόγδοος	9/8	8	8^2	64	64·9/8	72	72·9/8	81
sesquinonus supernonus ἐπέν(ν)ατος	10/9	9	9^2	81	81·10/9	90	90·10/9	100

Tab. 3: Verkettung der *numeri superparticulares*

Name der Proportion	Faktor	1. multiplex	numeri superparticulares		1. numerus superpartiens		2. numerus superpartiens	
übermehrteilig	$(2n+1)/(n+1) = 1+(n/n+1)$	n	$n(n+1)$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2(2n+1)/(n+1)$	$(n+1)(2n+1)$	$(n+1)^2(2n+1)^2/(n+1)^2$	$(2n+1)^2$
superbipartiens superbitertius ἐπιδιμερής ἐπιδίτριτος	5/3 1+2/3	2	6	9	9·5/3	15	15·5/3 $= 5^2$	25
supertripartiens supertriquartus ἐπιτριμερής ἐπιτριτέταρτος	7/4 1+3/4	3	12	16	16·7/4	28	28·7/4 $= 7^2$	49
superquadripartiens superquadriquintus ἐπιτετραμερής ἐπιτετράπεμπτος	9/5 1+4/5	4	20	25	25·9/5	45	45·9/5 $= 9^2$	81
superquinquepartiens superquinquesextus ἐπιπενταμερής ἐπιπένθεκτος	11/6 1+5/6	5	30	36	36·11/6	66	66·11/6 $= 11^2$	121
supersexpartiens supersexseptimus ἐφεξαμερής ἐφεξέβδομος	13/7 1+6/7	6	42	49	49·13/7	91	91·13/7 $= 13^2$	169
superseptempartiens superseptemoctavus ἐφεπταμερής ἐφεπτόγδοος	15/8 1+7/8	7	56	64	64·15/8	120	120·15/8 $= 15^2$	225
superoctopartiens superoctononus ἐποκταμερής ἐποκτέν(ν)ατος	17/9 1+8/9	8	72	81	81·17/9	153	153·17/9 $= 17^2$	289
supernovempartiens supernovemdecimus ἐπεννεαμερής ἐπεννεαδέκατος	19/10 1+9/10	9	90	100	100·19/10	190	190·19/10 $= 19^2$	361

Tab. 4: Verkettung der *numeri superpartientes*

2.1.3 Quadratische Pyramiden

Zwei *superparticulares*, die weiße 91 und die schwarze 190, werden als quadratische Pyramiden interpretiert, zusammengesetzt gedacht aus übereinander liegenden Quadraten. $9 = 3^2$ „Punkte" ergeben beispielsweise ein Quadrat der Seitenlänge 3, $16 = 4^2$ eines der Seitenlänge 4 (RA 8, Boeth. arithm. 2,23-24).

- $91 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$, vollkommene Pyramide (*pyramis perfecta*)
- $190 = 16 + 25 + 36 + 49 + 64$, die um die drei obersten Schichten ($1 = 1^2$, $4 = 2^2$ und $9 = 3^2$) verkürzte Pyramde (Pyramidenstumpf, *pyramis ter curta*)

Das größte, ganz unten liegende Quadrat nennt man **Basis** ($36 = 6^2$ zu 91, $64 = 8^2$ zu 190).

2.2 Spielfeld, Aufstellung der Spielsteine, Spielzüge

2.2.1 Spielfeld

Das Spielfeld hat unterschiedliche Größen, der Regensburger Anonymus nennt $8 \cdot 14$ Felder. Die Standardisierung geht später in Richtung auf ein doppeltes Schachbrett mit $8 \cdot 16$ Feldern.

2.2.2 Spielsteine

Die Aufstellung des Regensburger Anonymus ist sehr bunt. Die Spielsteine haben auf jeder Seite drei verschiedene Farben und Größen.

gerade Seite: *ex pari denominatae proportiones*

multiplex:	8 kleine Weiße (*albi minores*)
superparticularis:	8 größere Rote (*rubri maiores*)
superpartiens:	8 große Schwarze (*nigri maximi*)

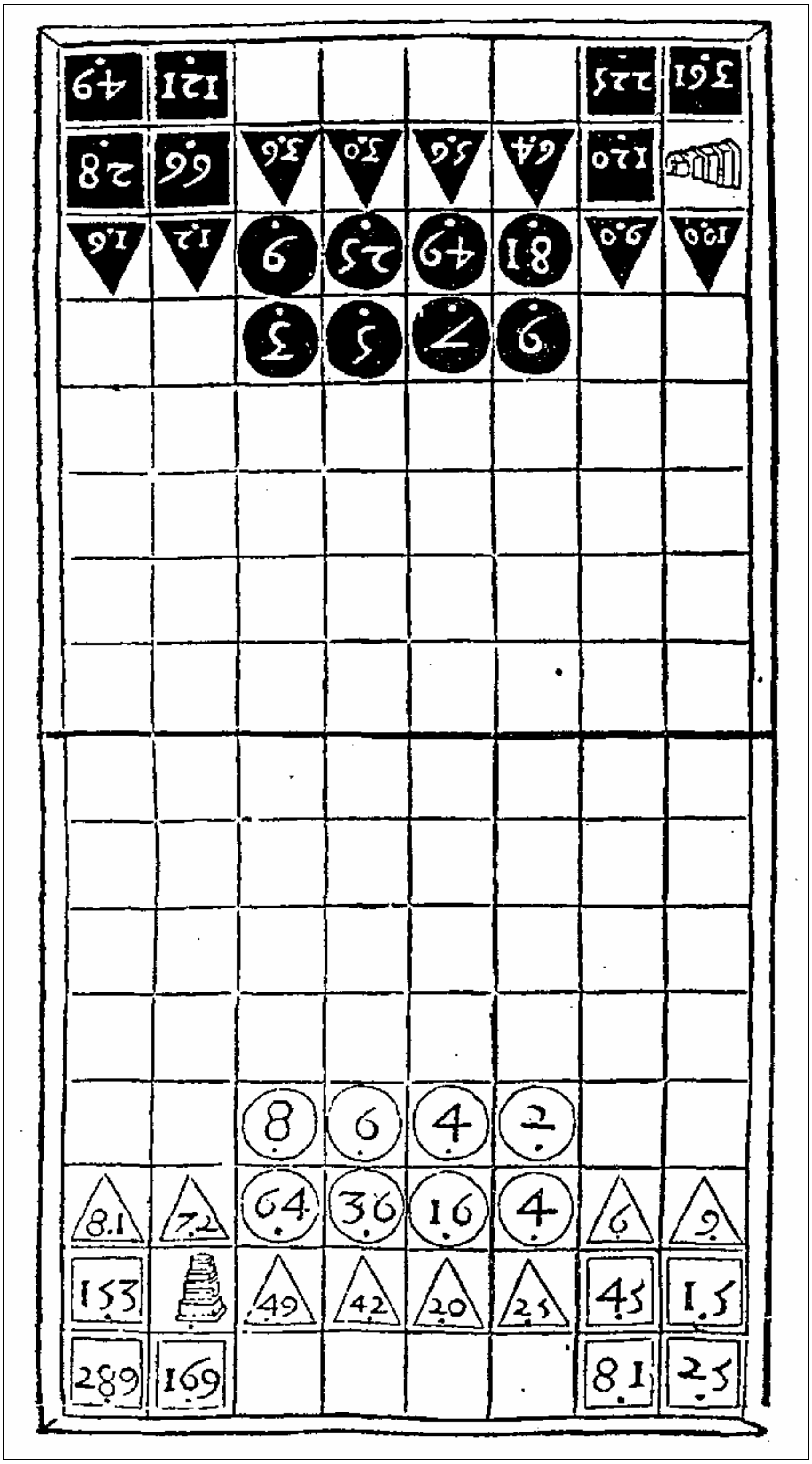


**Abb. 3: Aufstellung nach Claudius Buxerius (Claude de Boissière),
Nobilissimus et antiquissimus ludus Pythagoreus,
qui Rythmomachia nominatur 1556 (Smith, Eaton 1911: 75)**

ungerade Seite: *ex impari denominatae proportiones*

multiplex:	8 kleine Schwarze (*nigri minores*)
superparticularis:	8 größere Weiße (*albi maiores*)
superpartiens:	8 große Grüne (*virides maximi*)

Über die Form der Spielsteine wird vom Regensburger Anonymus keine Aussage getroffen. Später finden sich runde, dreieckige und viereckige Steine mit Namen, die nicht mehr den Proportionsbezeichnungen entsprechen: *pedites, comites, duces* in Werinhers Version um 1180 (Folkerts 1989: 332; Folkerts 1993: 113). Auch die speziellen Farben werden aufgegeben und man hat nur noch Weiß für die gerade Seite und Schwarz für die ungerade (Abb. 3).

2.2.3 Spielzüge

Es wird abwechselnd (*alternatim*) gezogen: vorwärts (*in ante*), rückwärts (*retro*), nach rechts (*dextrorsum*), nach links (*sinistrorsum*), im Winkel (*angulariter*; Felder werden nicht diagonal, sondern rechtwinklig gezählt):

multiplex:	ins zweite Feld (*in campum secundum*)
superparticularis:	ins dritte Feld (*in campum tertium*)
superpartiens:	ins vierte Feld (*in campum quartum*)

Der Ausdruck *in campum secundum* ist aus dem Text heraus nicht genau zu verstehen. Es kann gemeint sein:

1. benachbartes Feld: Sonst gäbe es keinen Spielstein, der nur ein Feld weit zieht;
2. übernächstes Feld: Sonst gäbe es in RA 18 nicht den Ausdruck *in suo proximo loco*.

Man bedenke aber, dass der Text aus verschiedenen Vorlagen zusammengesetzt ist!

Derartige kleinere Unklarheiten werden noch öfter zu verzeichnen sein. Sie betreffen aber nur die Ausführung der Rithmomachie im Detail, zu der man ohnehin die Anleitung eines Lehrmeisters brauchte und bräuchte.

„Die Darstellungen des 11. Jh. sind so knapp, dass sie nicht als Spielanleitungen geeignet sind, sondern die Kenntnis des Spiels voraussetzen. Erst seit etwa 1130 (Fortolf) gibt es Darstellungen, die auch ohne fremde Hilfe verständlich sind“ (Folkerts 1989: 333; ähnlich Evans 1976: 261).

Die Beseitigung der vorliegenden Unklarheiten würde das Verständnis des Prinzips der Rithmomachie in keiner Weise verbessern. Daher werde ich die Ungereimtheiten in diesem Vortrag zwar nennen, aber keinen Versuch zu deren Lösung unternehmen.

2.3 Schlagen

Es gibt vier Möglichkeiten des Schlagens, die sich aus heutiger Sicht sehr schnell erläutern lassen. Ihre lateinischen Bezeichnungen stammen erst aus dem 16. Jahrhundert (Evans 1976: 268; Folkerts 1989: 332). Die im Folgenden genannten englischen Übersetzungen finden sich bei Smith und Eaton (1911: 76).

Auch hier gibt es Unklarheiten: Wir wissen aus der Beschreibung des Regensburger Anonymus beispielsweise nicht, ob der schlagende Spielstein an die Stelle des geschlagenen gesetzt wird, insbesondere wenn zwei Spielsteine kombiniert schlagen.

1. *congressus*: Treffen, *meeting* (RA 7)

Trifft ein Spielstein bei einem rechtmäßigen Zug (*in suo legitimo tractu*) auf einen gegnerischen gleichen Wertes, so soll er letzteren wegnehmen (*auferat*).

2. *insidiae*: Summe / Produkt der Werte von benachbarten Spielsteinen, *ambuscade* (RA 7)

Ein gegnerischer Spielstein, der über Eck (*in angulis*) oder seitlich (*in lateribus*) von eigenen Spielsteinen in die Zange genommen wird, deren Werte multipliziert (*multiplicati*) oder summiert (*iuncti*) den Wert des gegnerischen ausmachen, soll weggenommen werden.

Die Formulierung ist unklar (Dürfen es nur zwei oder auch mehrere angreifende Steine sein?) und es gibt im Text nur ein einziges Beispiel: „Durch die Verbindung (*per adiunctos*) der 3 und der 5 fällt die 8“ (RA 16).

3. *eruptio*: Spielsteinwert mal Entfernung, *assault* (RA 7)

3.1 Variante: Ein gegnerischer Spielstein wird weggenommen, wenn das Produkt aus dem Wert des eigenen Spielsteins und dem Abstand (*quantitas camporum interiacentium*) den Wert des gegnerischen darstellt.

„Durch die 3 der gegnerischen Seite fällt die 6 im zweiten Feld (*in secundo campo*)" (RA 16).

Details bleiben unklar; es gibt drei Möglichkeiten der Abstandsberechnung:

- kein Rand mitgezählt, d.h. die echt dazwischen liegenden Felder (*campi interiacentes*)
- ein Rand mitgezählt, d.h. die Anzahl der Zugschritte (*in secundo campo*)
- Ränder, d.h. Feld des eigenen und Feld des gegnerischen Spielsteins, mitgezählt.

3.2 Variante: Wenn das Produkt nicht reicht, kann additiv der Wert eines zweiten eigenen Spielsteins hinzugenommen werden. Diese zweite Variante wird nur in Beispielen genannt, Details der Ausführung werden nicht erläutert, etwa welcher Spielstein sich bewegt.

„Durch die 16 wird die 289 im 13ten Feld geschlagen, wenn ihr die 81 beim nächsten Zug (*in proximo suo tractu*) hinzugefügt wird" (RA 17).

4. *obsidio*: Belagerung durch gegnerische Spielsteine, *siege* (RA 9)

Ein Spielstein, der von gegnerischen so eingekreist ist, dass er durch einen rechtmäßigen Zug nicht entkommen kann, wird weggenommen. Dies gilt insbesondere für die (nicht zusammengesetzten) Primzahlen (*primi et incompositi*). Braucht man dazu 4 oder 8? Es reichen 4, wenn man die *angulariter*-Spielzüge streng rechtwinklig durchführt.

„Auf Seiten gerader Proportion wird die von Feinden auf allen Seiten umstellte (*undique circumventus*) 2 gefangen" (RA 16).

5. Pyramide (RA 8)

Jede der beiden Pyramiden hat zwei angreifbare Zahlenwerte, ihren Gesamtwert und den Wert ihrer Basis (unterstes Quadrat: $36 = 6^2$ für 91 bzw. $64 = 8^2$ für 190). Mit dem Fall der Basis einer Pyramide fällt nicht nur die gesamte Pyramide selbst, sondern auch alle Spielsteine mit Quadratzahlen dieser Pyramide.

2.4 Siegbedingungen und Mittelwerte

Der Text des Regensburger Anonymus verlangt das Setzen von Folgen aus drei Zahlen mit bestimmten Mittelwert-Eigenschaften, sogenannten *medietates*, nämlich eine arithmetische und eine harmonische Dreierfolge.

Dazu können geschlagene gegnerische Steine wieder ins Spiel genommen werden, da die eigenen Steine oft nicht ausreichen. Wie das genau geht, sagt uns der Regensburger Anonymus nicht.

Um diese *medietates* zu verstehen, brauchen wir etwas Mathematik:

Das **arithmetische Mittel** ist die additive Mitte zwischen zwei Zahlen.

a(10,40) = 25;
konstante Differenz 15: 10 + 15 = 25; 25 + 15 = 40

Anwendungen sind allgemein bekannt: Notendurchschnitt, Statistik

Anwendung in der Musik:
Frequenz der Quint (3/2), wenn Tonika 1 und Oktav 2
Frequenz der großen Terz (5/4), wenn Tonika 1 und Quint = 3/2

Das **harmonische Mittel** ist der Kehrwert des arithmetischen Mittels der Kehrwerte von zwei Zahlen.

„Wie das größte Folgenglied sich zum kleinsten verhält, so verhalte sich die Differenz des größten und des mittleren zur Differenz des mittleren und des kleinsten“ (RA 12).

h(10,40) = 16;
konstante Differenz der Kehrwerte : 1/40 + 3/80 = 1/16; 1/16 + 3/80 = 1/10

Anwendung in der Musik:
Saitenlänge der Quint (2/3), wenn Tonika 1 und Oktav 1/2
Saitenlänge der großen Terz (4/5), wenn Tonika 1 und Quint 2/3

Die Frequenzen verhalten sich wie arithmetische Mittel, die Saitenlängen wie harmonische.

Geometrische Folgen tauchen im Regensburger Anonymus noch nicht auf, ebenso wenig bei Asilo, sondern erst bei Fortolf 1130, obwohl sie seit der Antike bekannt sind. Warum, vermag ich Ihnen nicht zu sagen.

Das **geometrische Mittel** ist die multiplikative Mitte zwischen zwei Zahlen.

g(10,40) = 20;
konstanter Quotient 2: $10 \cdot 2 = 20$; $20 \cdot 2 = 40$

Anwendung in der Geometrie: zu Rechteck flächengleiches Quadrat, Höhensatz

Wer so nicht zu Ziel kommt, soll die **größte Harmonie** (*maxima et perfecta symphonia*) setzen: 6, 8, 9, 12 (RA 14).

Ihre wesentlichen Qualitäten werden so erklärt (Abb. 4): Sie enthält

- eine arithmetische Dreierfolge: 6, 9, 12
- eine harmonische Dreierfolge: 6, 8, 12
- die Proportion *dupla* 12/6 (= 2/1), die der Oktav (*diapason*) entspricht
- die Proportion *sesquitertia* 12/9 = 8/6 (=4/3), die der Quart (*diatesseron*) entspricht
- die Proportion *sesqualtera* 12/8 = 9/6 (= 3/2), die der Quint (*diapente*) entspricht
- die Proportion *sesquioctava* 9/8, die der Sekund (*tonum*) entspricht

(cf. Borst 1986: 464-465).

Im Vergleich zu späteren Beschreibungen der Rithmomachie ist das System der Siegbedingungen beim Regensburger Anonymus noch sehr einfach ausgestaltet.

Diese werden später verfeinert (*proper victories*, cf. Smith, Eaton 1911: 79; Folkerts 1989: 333):

- *Victoria magna*: eine Dreierfolge eines beliebigen Typs
- *Victoria maior*: eine Vierersequenz, die zwei Dreierfolgen verschiedenen Typs enthält
- *Victoria praestantissima / excellentissima*: eine Vierersequenz mit allen Folgentypen, in Anlehnung an die *maxima et perfecta symphonia*

Daneben gibt es für ungeübte Spieler auch simple Auswertungen der geschlagenen Spielsteine (*common victories*, cf. Smith, Eaton 1911: 78).

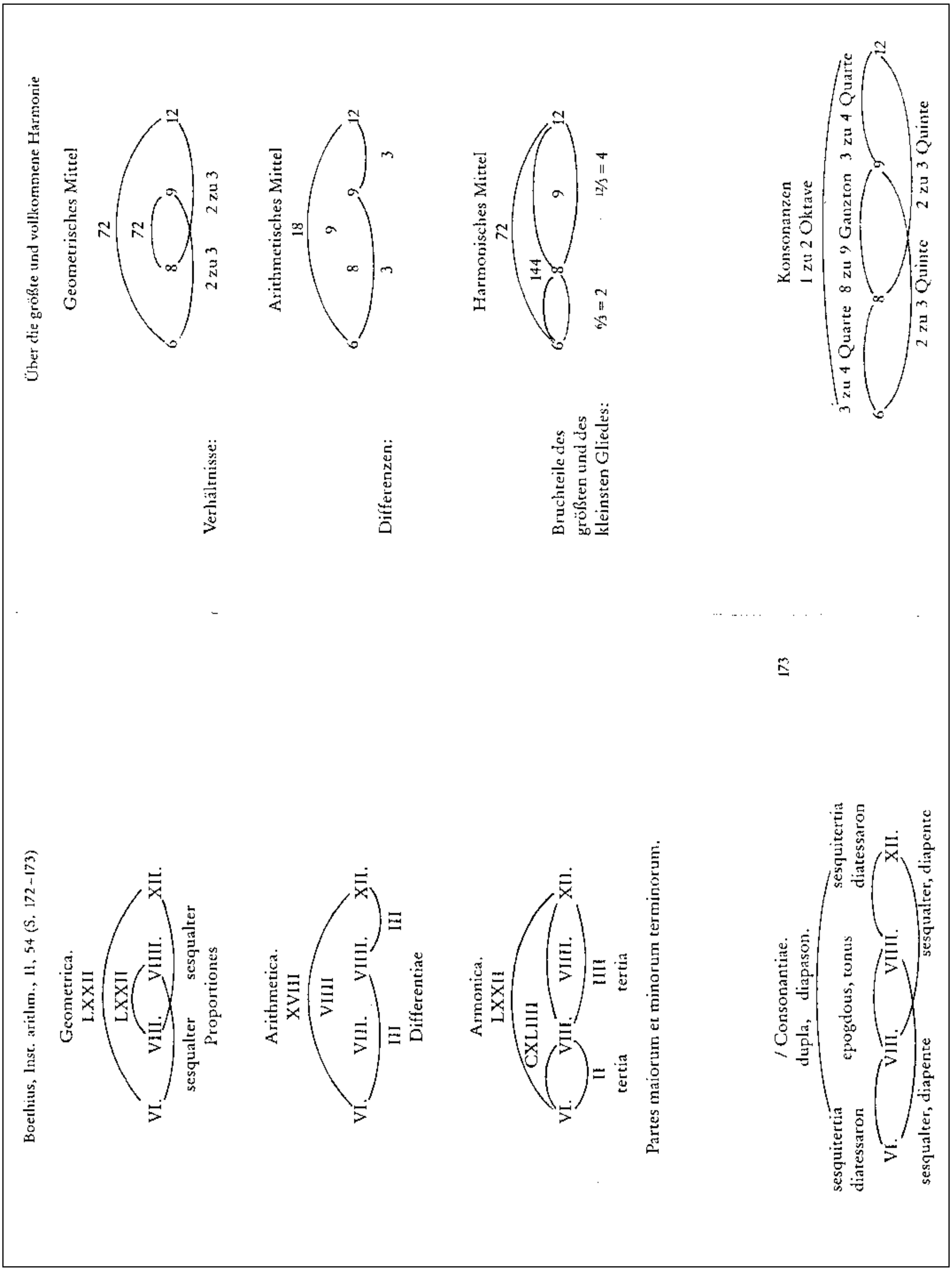


Abb. 4: De maxima et perfecta symphonia (Boeth. arithm. 2, 54 nach Krischer 1990: 216-217)

3. Kulturgeschichtliche Diskussion: Wert und Zweck der Rithmomachie vom mittelalterlichen Schulbetrieb bis zur heutigen Informatik

Ich beginne die Diskussion mit einem Blick auf die Beispielsammlung des Regensburger Anonymus. Sie bildet beinahe die Hälfte des gesamten Textes und formuliert ihre Beispiele in stereotyper, formelhafter Syntax unter Verwendung der römischen Zahldarstellung. Die einzelnen Berechnungen dienen der Erläuterung des multiplikativen Schlagprinzips *eruptio*, ggf. mit additiver Erweiterung, also „Wert des eigenen Spielsteins · Entfernung + ggf. Wert eines weiteren eigenen Spielsteins = Wert des gegnerischen Spielsteins“.

Sie ist gegliedert nach erstens „ungerade Seite schlägt gerade Seite“ und zweitens der umgekehrten Schlagrichtung. Innerhalb der beiden Teile wird aufsteigend nach den Werten der Spielsteine sortiert. Diese Liste ist also ausführlich und systematisch aufgebaut, aber nicht vollständig, d.h. es gibt weitere Varianten, die nicht genannt sind. Wenn man im Mittelalter nur Wichtiges aufgeschrieben hat, muss sie wichtig gewesen sein!

Warum aber dieser Aufwand? fragt man sich. Warum widmet der Regensburger Anonymus der Beispielsammlung wesentlich mehr Ausführlichkeit und Aufmerksamkeit als der Herleitung der Spielsteinwerte sowie der Erklärung der Spiel- und Schlagregeln? In der ersten Fassung werden von Asilo außer den *multiplices* nicht einmal die Spielsteinwerte genannt (Borst 1986: 331). Woher kommt diese Diskrepanz? Hätte denn nicht eine Handvoll Beispiele genügt, um das Prinzip zu erläutern? Aus heutiger Sicht ja, aber damals stellte die Berechnung der Beispielwerte eine enorme Schwierigkeit dar, da effektive und ökonomische Multiplikationsmethoden nicht verbreitet waren.

Es gibt drei Grundvoraussetzungen für die Entwicklung ökonomischer arithmetischer Rechenmethoden:

- Bedarf an Multiplikationsmethoden, korreliert zur Bedeutung von Zahlen (und zur Klassifikation von Zahlen, die sich in der zugehörigen Terminologie niederschlägt)
- effiziente Zahldarstellung, Notation (Multiplikation römischer Zahlen fast unmöglich)
- auswendig gelernte einfache Rechenergebnisse; etwa kleines Einmaleins als Basis von Multiplikationsmethoden

Diese drei Voraussetzungen stehen untereinander in Wechselbeziehung: ohne Bedarf keine Auswahl einer diesbezüglich effizienten Zahldarstellung; umgekehrt nützt eine effiziente Zahldarstellung nichts, wenn kein Bedarf vorhanden ist; ebenso bestimmt der Bedarf das Auswendiglernen des kleinen Einmaleins, das seinerseits wiederum eine effiziente Zahldarstellung braucht.

Aus der Diskussion dieser drei Aspekte und ihrer wechselseitigen Abhängigkeiten wird der ursprüngliche didaktische Zweck der Rithmomachie klar hervorgehen. Ein Blick voraus: Es kann nicht das Erlernen und Einüben von Rechenfertigkeit gewesen sein!

Ich hebe diese Argumentation deswegen so stark hervor, weil erstens der ursprüngliche Zweck der Rithmomachie mitunter missverstanden wurde und noch wird und weil zweitens sie auch andere Zwecke erfüllen kann, sozusagen über ein Zweckpotential verfügt, dessen Facetten in unterschiedlichen kulturellen Kontexten deutlich werden, von der Rhythmomachie bis hin zur Arithmomachie.

Zum Abschluss werde ich dann die Frage des Vortragstitels beantworten und anhand von Bemerkungen des Fortolf, 40 Jahre später als der Regensburger Anonymus, die Rithmomachie in ihrem ursprünglichen kulturellen Kontext zusammenfassend charakterisieren.

3.1 Bedarf an Rechenmethoden und Bedeutung von Zahlen

Die jeweilige Bedeutung, die Zahlen beigemessen wird, ist eng korreliert zur jeweiligen Art, Mathematik zu treiben.

Zahlen hatten im Mittelalter nicht die Bedeutung wie heute, sie hatten zunächst keinen größeren kaufmännischen und keinen mathematischen Eigenwert in dem Sinne. Sie waren nicht primär Rechengrößen. Der Gebrauch nicht-schriftlicher und nicht-ökonomischer Rechenmethoden am Linienabakus mit Rechenpfennigen des Wertes 1 genügte völlig (Abacisten, Abb. 5).

Neben den schon besprochenen Zahlenverhältnissen ging es in Bezug auf Zahlen zunächst um

- Herleitung (Generierung) von Zahlen aus der 1 und deren Rückführung darauf unter Verwendung von bestimmten Proportionen (Boeth.arithm. 2,2).
- Ableitungen beliebiger Dreierfolgen (*inaequalitas*) aus der Dreierfolge (1,1,1) (*aequalitas*) bzw. Rückführungen beliebiger Dreierfolgen auf (1,1,1) (Boeth.arithm.2,1); hierzu wird der *saltus Gerberti* verwendet, der das Ziel der Reduktion durch sukzessives paarweises Subtrahieren erreicht (Friedlein 1867: 66).

Brett- und Ziffernrechner

Zur Linken der Arithmetica sitzt Pythagoras vor einem Linienbrett, auf dem die Zahlen 1241 und 82 gelegt sind; zur Rechten Boethius vor Zahlen in indischen Ziffern. Das Mittelalter hielt, beidemal irrtümlich, diese Männer für die Erfinder der einen und der anderen Rechenweise. (Auf dem Gewand der Arithmetica die geometrischen Reihen 1 2 4 8 und 1 3 9 27.)
Aus der Margarita Philosophica des Karthäuserpriors Gregor Reisch von 1503 (B 149).

Abb. 5: Algorist und Abacist
(Gregor Reisch 1503 nach Menninger 1958: II 162)

- Bestimmung, wie oft eine gerade Zahl (immer *pariter*) durch 2 teilbar ist:

nur *pariter par*	Zweierpotenz 2, 4, 8, 16, 32,
nur *pariter impa*r	genau einmal durch 2 teilbar
sowohl *pariter par* als auch *pariter impar*	mehrfach durch 2 teilbar, aber nicht gänzlich

  (cf. Boeth. arithm. 1,8,17,3; Mart. Cap. 7,743; Nikom. 1,8-11; Euklid IX.32-34; Folkerts 1993: 114)
- prime und relativ prime Zahlen
- Computus, christliche Kalenderrechnung
- Tonverhältnisse in der Musik
- christliche Zahlensymbolik

Dazu eine Stilblüte der Mathematikgeschichte des 19. Jahrhunderts: Von der Proportionenlehre bei Jordanus Nemorarius (~1260) schreibt Hermann Hankel sehr provokativ: „Schriften, welche … im Wesentlichen auf Boethius Arithmetik zurückgehend, mit unerträglicher Weitläufigkeit die trivialsten Eigenschaften der Zahlen und Proportionen behandeln und die von den Arabern überkommene Bruchrechnung ignorierend jene widerwärtigen antiken Benennungen der Verhältnisse (proportio multiplex, superparticularis, superpartiens, multiplex superparticularis, multiplex superpartiens, superbipartiens tertias, supertripartiens quartas, … sesquialtera, sesquitertia …) und die entsprechenden Rechnungen mit einer pedantischen Würde vortragen, die uns zuweilen den Eindruck verschmitzten Hohnes macht. Es war dieser Wust einmal herkömmlich und niemand hatte den Mut, ihn fallen zu lassen“ (Hankel 1874: 353).

Vor diesem Hintergrund ist die folgende Bemerkung von Menso Folkerts deshalb genau zu lesen: „Die Rithmimachie ermöglichte es, gleichsam spielerisch diejenige Arithmetik zu erlernen, die in den Kloster- und Domschulen innerhalb des Quadriviums gelehrt wurde“ (Folkerts 1989: 333). Das heißt, vorrangig eine Proportionsarithmetik, viel weniger eine Rechenarithmetik! Was man lernte, war die Vertrautheit mit den Proportionen der (neu-)pythagoreischen Zahlenlehre, die mit der *Institutio arithmetica* des Boethius verbreitet wurde.

Das Grundbedürfnis nach Rechenfertigkeit in schriftlicher Form stieg erst mit dem Aufblühen des Handels und dem schriftlichen Zahlgebrauch bei den Kaufleuten (Algoristen, Abb. 5). Vorher hatte man ein anderes Kognitionssystem als heute, das den Schriftgebrauch nicht als zentrales Moment beinhaltete.

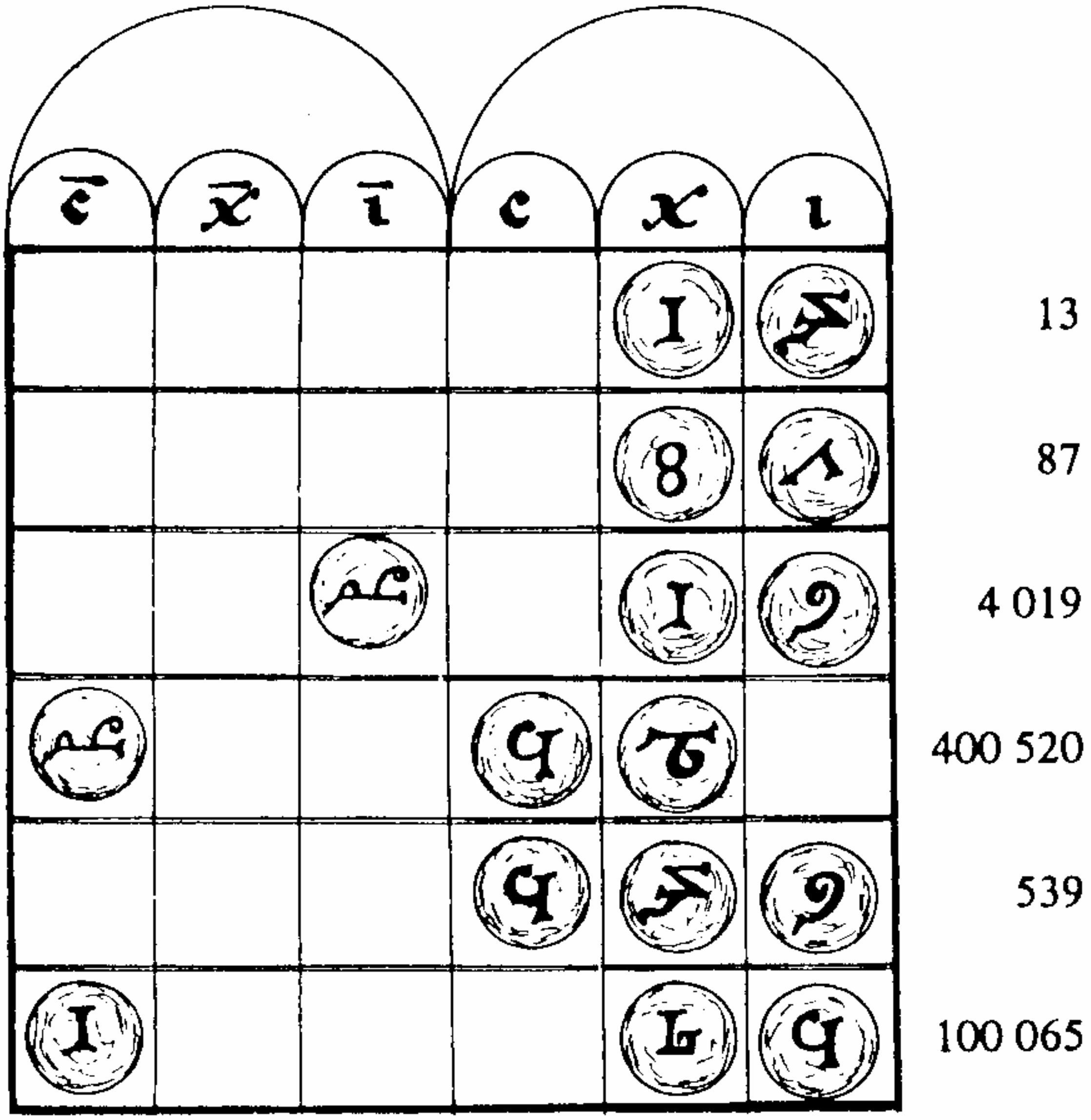


Abb. 352: Das Prinzip der Wiedergabe ganzer Zahlen durch apices auf dem verbesserten Abakus des Gerbert und seiner Schüler; dieser Abakus bestand aus 27 Spalten, die zu Dreiergruppen zusammengefaßt waren. Der Zahlenwert der apices war positionsabhängig je nach Spalte, in der sie standen; das Fehlen von Einheiten einer Ordnung wurde durch Freilassen der entsprechenden Spalte angezeigt.

Abb. 6: Klosterabakus zur Illustration eines Stellenwertsystems (Ifrah 1991: 532)

3.2 Zahldarstellung

Eng korreliert zu Bedeutung und Wert von Zahlen ist die Notation von Zahlen.

Man unterscheidet im Wesentlichen zwei formalsprachliche Darstellungssysteme, die sich im Komplexitätsgrad der Darstellungselemente und ihrer Kombinationssyntax unterscheiden:

Stellenwert- / Positionssystem:

Der Zahlenwert eines Ziffernzeichens hängt von dessen Form und Position ab (Abb. 6).
Babylon (Basis 60); Maya, Kelten (20); Knotenschnüre Peru, Indien (10); Informatik (2, 16).

Additives System:

Der Zahlenwert eines Ziffernzeichens hängt nur von dessen Form ab.
Die „Position“ kann nur festlegen, ob der Wert addiert oder subtrahiert wird: IX, XI.
Beispiel 5678: griechische Alphabetzahlen ’EXOH,
römische Zahlen MMMMMDCLXXVIII.

In Konkurrenz daneben steht die natürlichsprachliche Darstellung, die zur formalen nicht isomorph zu sein braucht, die also einem anderen Darstellungssystem gehorchen kann.

1. natürliche Sprache ist mathematisch effizienter: lat. *quinque milia sescenti septuaginta octo* 5678
2. natürliche Sprache ist mathematisch anders (vigesimal): frz. *quatre-vingt-dix* (4 · 20 + 10 =) 90, dän. *haltresindstyve* (½3 · 20 = 2,5 · 20 =) 50
3. natürliche Sprache hat andere Positionsreihenfolge: dt. *dreiundzwanzig* (und nicht *zwanzigdrei*), tschech. *tři a dvacet* 23

Im Mittelalter standen verschiedene formale Zahldarstellungssysteme unterschiedlicher Anwendung und Verbreitung konkurrierend nebeneinander: das griechisch-alphabetische System, das griechisch-numerische, das römische, das kryptisch-formale des John of Basingstoke (13. Jahrhundert) und der Zisterzienser, das arabisch-indische.

So werden noch Anfang des 17. Jahrhunderts die arabischen Ziffern im *Lexicon philologicum* des Matthias Martinius als *numeri barbarici* bezeichnet: „*Numeri arithmetici* in Latinis scriptis sunt, I. *Romani* … II. *Barbarici*, qui vulgo nunc usitati; etiam Germanis et aliis Europæis populis: qui quidem ab Indis accepti videntur“ (Martinius 1623: 2318).

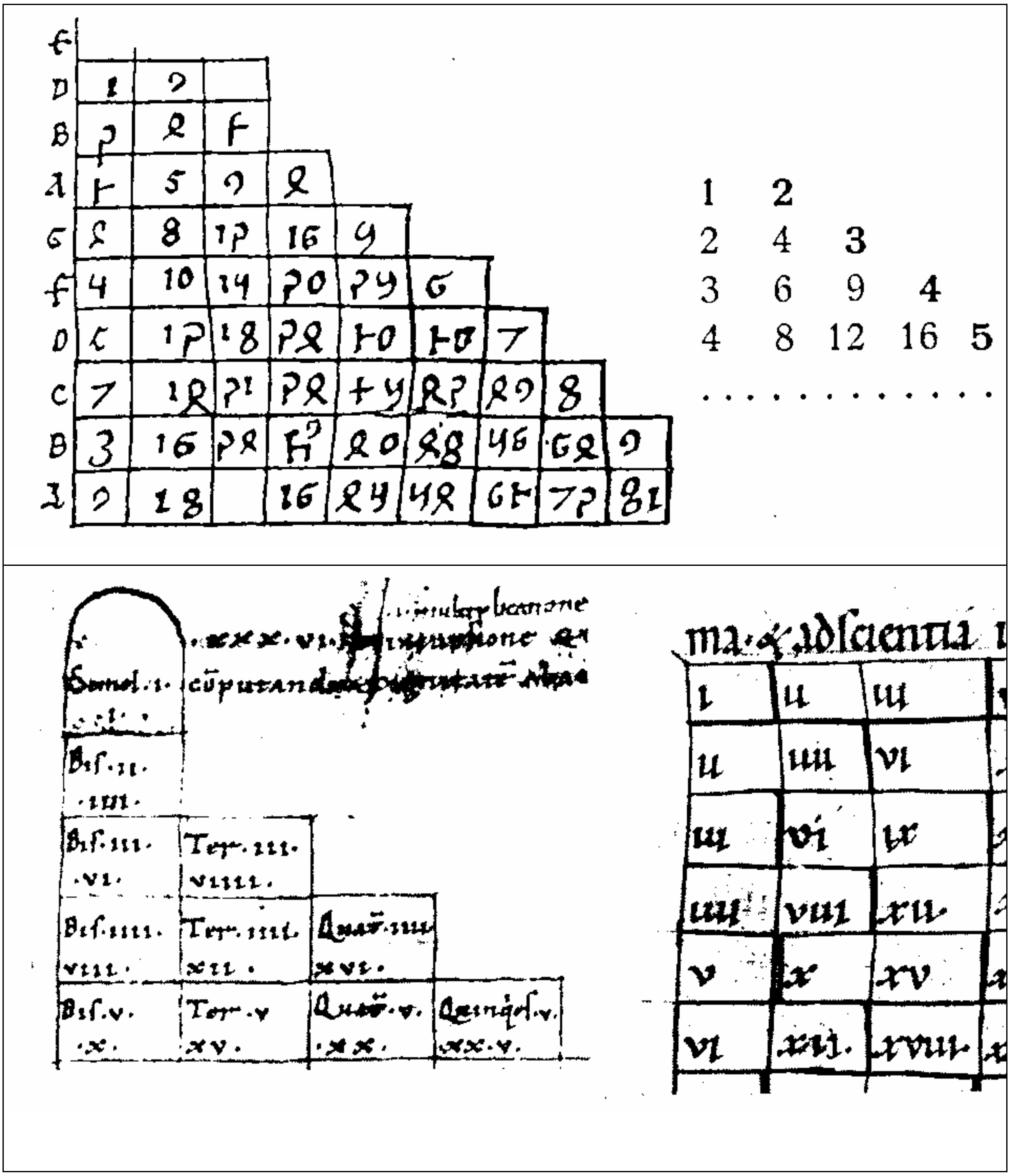


Abb. 7: Multiplikationstafeln, eine aus dem 12. (1143) (Cod. Vind. 275, 27r; Nagl 1889; Menninger 1958: II 239) und zwei aus dem 13. Jahrhundert (Menninger 1958: II 86)

Es dauerte ein halbes Jahrtausend bis sich schließlich das indisch-arabische System durchgesetzt hatte. Warum war das so? Welche Gründe gab es dafür?

Gerbert von Aurillac brachte zwar schon vor der Jahrtausendwende arabische Ziffern in Form von *apices* aus Spanien mit und konnte auch mit ihnen rechnen (Abb. 6), wir finden sie auch bei Otloh von St. Emmeram (Abb. 8, cf. 3.3). Die Fähigkeit zum Einsatz dieser Form effizienter Zahldarstellung war also ohne Zweifel vorhanden.

Warum konnte sie sich dennoch nur sehr langsam durchsetzen? Sie bringt zunächst nur Vorteile für die Fertigkeit im schriftlichen Rechnen! Wenn diese aber nicht im Fokus liegt, dann braucht auch die Zahldarstellung diesbezüglich nicht effizient zu sein.

In Bereichen mit steigendem Bedarf an schriftlicher Rechenfertigkeit gewannen die arabischen Ziffern schnell an Bedeutung: Leonardo Fibonacci von Pisa lernte als Kaufmannssohn in Algier von Arabern das Rechnen mit indisch-arabischer Zahldarstellung und veröffentlichte 1202 den *Liber abaci*, die erste systematische Einführung dazu.

3.3 Multiplikationsmethoden und das kleine Einmaleins

Alle älteren Anleitungen der Rithmomachie (11., 12., 13. Jahrhundert) kennen nur die römische (griechische) Zahldarstellung. Mit so repräsentierten Zahlen zu multiplizieren, bedeutet eine Sisyphusarbeit, zumal die bei der Rithmomachie erforderlichen Multiplikationen über das kleine Einmaleins hinausgehen. Man musste wohl viele Schlagkombinationen im Kopf haben.

Die Formalisierung von Addition und Multiplikation in Schriftform kann auf der römischen Zahldarstellung nicht aufsetzen. Dieser Schritt ist notationsabhängig! Mathematische Kompetenz ist so gesehen kein absoluter Kulturindikator.

Das Phänomen, dass sich ein Zweig der Mathematik erst dann produktiv weiterentwickeln kann, wenn eine adäquate Notation eingeführt wird, ist in der Mathematikgeschichte verschiedentlich zu beobachten: Differential- und Integralrechnung, Vektorrechnung etc. Auf diese Weise veränderte und beeinflusste die indisch-arabische Zahldarstellung – wenn erst einmal eingeführt – die Möglichkeiten und die Art, Mathematik zu betreiben.

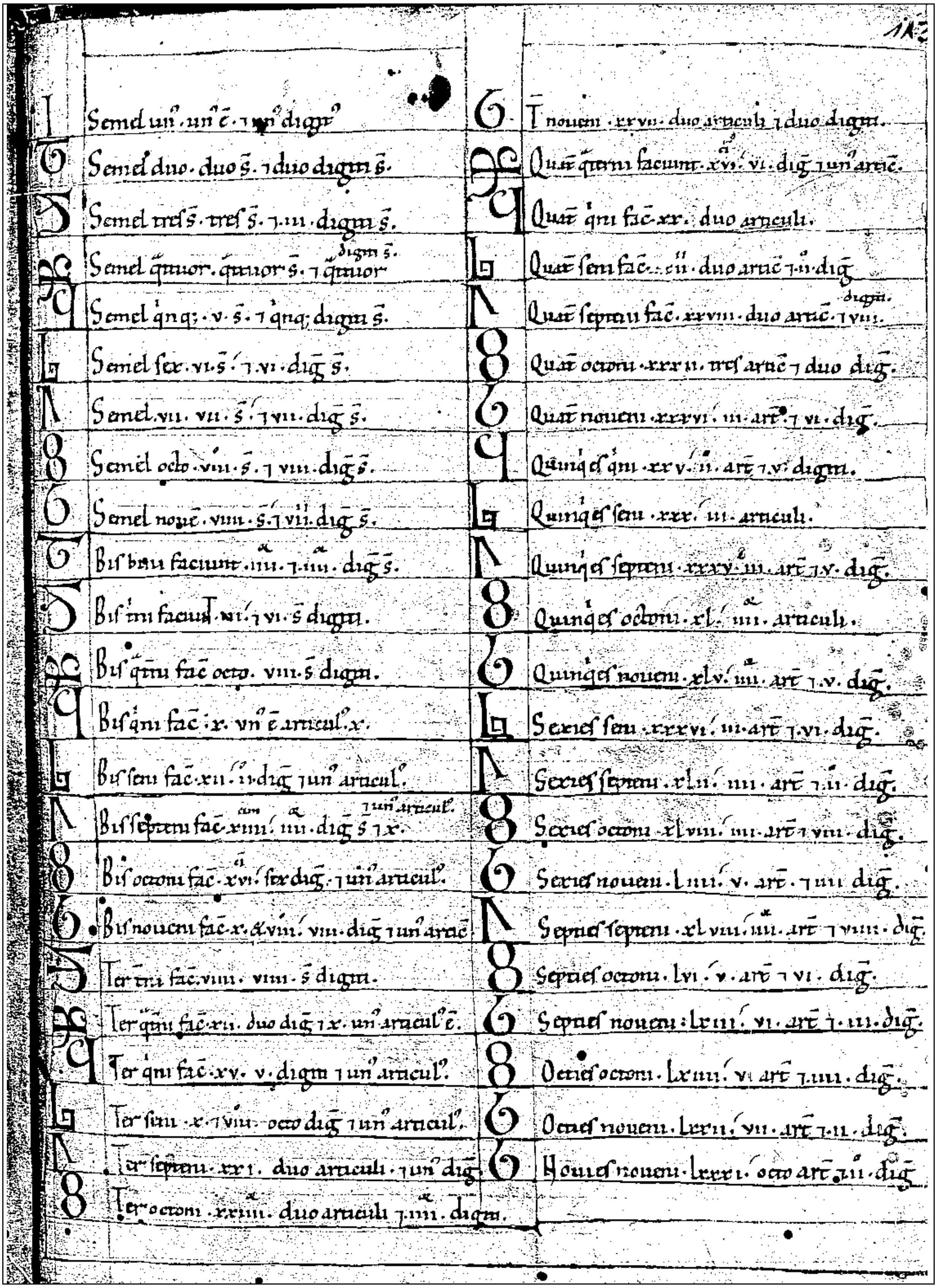


Abb. 8: Die Apices-Multiplikationssätze von Otloh von St. Emmeram (Clm 14137, 113r; Menninger 1958: II 136)

Ebenso war das kleine Einmaleins als Voraussetzung ökonomischer Multiplikationsmethoden keineswegs Allgemeingut. Ich darf wieder Hermann Hankel zitieren: „Das Einmaleins wurde, wie jene primitive Art des Multiplizierens und Dividierens zeigt, in diesem Rechenunterrichte nicht auswendig gelernt; diejenigen, welche sich eingehender mit Kirchenrechnung beschäftigten, besaßen es schriftlich … abacus mensurandi oder mensa Pythagorica“ (Hankel 1874: 309-310).

Menso Folkerts (1999) schreibt in seinem Artikel über Rechenkunst im Lexikon des Mittelalters, dass das Einmaleins oft nur bis 5 · 5 gelernt wurde und weitere Produkte auf Komplemente zu 10 zurückgeführt wurden, also 7 · 7 = (10-3) · (10-3). Fortolf spricht gar von der *scientia multiplicandi* (Peiper 1880: 171, §4).

Warum hätte man das Einmaleins auch auswendig lernen sollen? Angesichts der römischen Zahldarstellung war es im Hinblick auf eine Effizienzsteigerung schriftlicher Multiplikation ohnehin nutzlos, und außerdem war eine derartige Verbesserung angesichts der Bedeutung, die man den Zahlen beimaß, nicht besonders wichtig.

Gerbert hingegen kannte den Wert des auswendig gelernten Einmaleins, weil er es im Zusammenhang mit den arabischen Ziffern sehen konnte. Ich zitiere aus seiner *Regula de abaco computi*: „Es gibt auch eine andere vielleicht nicht üble Weise zu dividieren, welche jedoch nur denen, welche einigen Fleiß auf die Übung im Rechnen verwandt haben, erklärt werden kann. Das aber ist die Übung …, dass man alle Einer (digiti) mit den Einern multiplizieren und Einer von Einern im Kopfe (memoriter) abzuziehen weiß“ (Regula de abaco computi p. 331 nach Hankel 1874: 323).

Wie schon bei der Zahldarstellung zeigt sich also auch in Bezug auf arithmetische Methoden die Situation heterogen.

Darstellungen einer Einmaleinstabelle gibt es schon bei Nikomachos (1,19) und bei Boethius (arithm. 1,26). Derartige Multiplikationstafeln tauchen dann ab dem 11. Jahrhundert wieder auf.

Abb. 7 zeigt typische Beispiele aus dem 12. und 13. Jahrhundert, eines aus einer der ältesten deutschen Algorismushandschriften von 1143 mit arabischen Ziffern; die beiden anderen verwenden römische.

Eine außergewöhnliche Besonderheit verdanken wir Otloh von St. Emmeram (Abb. 8). Es handelt sich um keine Tafel im eigentlichen Sinne, sondern um lateinisch verbalisierte Multiplikationssätze. Sie enthalten nebeneinander römische Ziffern, die aus den westarabischen Gubar-Ziffern abgeleiteten *apices* und die *digitus-articulus*-Terminologie, die auf die Fingerzahlen des Beda Venerabilis (~700) zurückgeht.

Multiplicirn.

Heysset vil machen/vnnd leret wie mann ein zal mit jr/oder einer andern vilfeltigen sol/vnd du must für allen dingen/das ein mal eins wol wissen/vnd außwendig lernen wie hie.

1	1	1	2	9	18	5	6	30
1	2	2				5	7	35
1	3	3	3	3	9	5	8	40
1	4	4	3	4	12	5	9	45
1	5	5	3	5	15			
1	6	6	3	6	18	6	6	36
1	7	7	3	7	21	6	7	42
1	8	8	3	8	24	6	8	48
1	9	9	3	9	27	6	9	54
mal	ist		mal	ist		mal	ist	
2	2	4	4	4	16	7	7	49
2	3	6	4	5	20	7	8	56
2	4	8	4	6	24	7	9	61
2	5	10	4	7	28			
2	6	12	4	8	32	8	8	64
2	7	14	4	9	39	8	9	72
2	8	16	5	5	20	9	9	81

Abb. 9: Multiplikationstafel mit Kommentar aus Adam Rieses Rechenbuch (Adam Ries 1525, 11-12)

digiti sind die Zahlen von 1 bis 9, sie werden mit den Fingern der linken Hand gezeigt; *articuli* sind die durch 10 teilbaren Zahlen, sie werden bis 100 mit den Fingergelenken der linken Hand gezeigt (Menninger 1958: II 5). *compositi* lassen sich als Summe aus je einem Exemplar der beiden Typen auffassen. Noch im beginnenden 17. Jahrhundert sind diese Bezeichnungen bekannt, wie ein Eintrag in dem schon genannten Wörterbuch des Martinius zeigt: „Porro numerus est 1. *Digitus*, *μοναδικός*, … Dicti sunt hi, quia tanquam digiti singuli per se apprehendunt. 2. *Articulus*, in decem aequales partes dividuus, ut 10. 20. 30. &c. … 3. *Compositus*, ex digito & articulo: ut 12 ex 2 digito & 10 articulo, & omnis numerus inter duos articulos proximos“ (Martinius 1623: 2318).

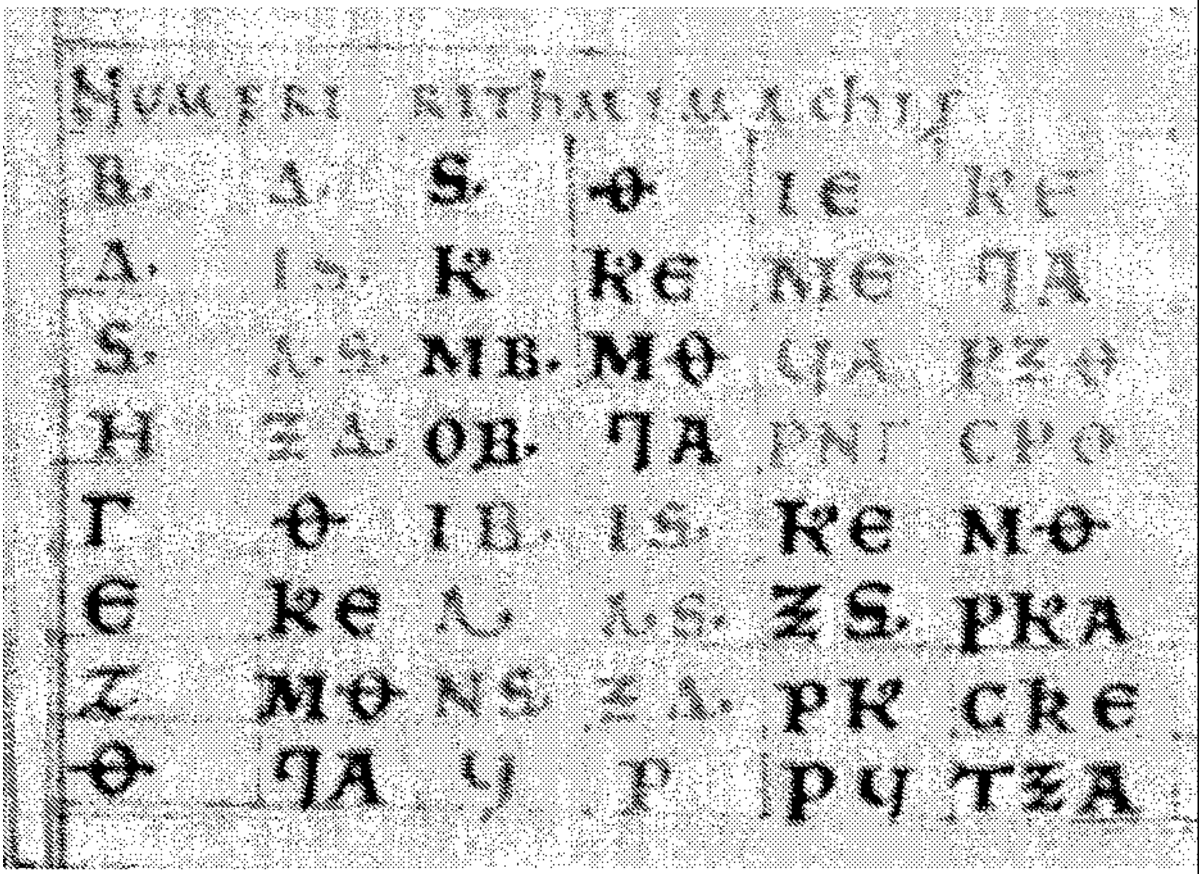
Erst das ausgehende 15. Jahrhundert bringt mit dem Aufkommen der Rechenbücher für Kaufleute – das älteste 1483 ist das Bamberger Rechenbuch des Ulrich Wagner, 1522 erscheint Adam Rieses *Rechnung auf der Linien und Federn*, die übrigens beide auch die Beispielsammlung *Practica* zum *Algorismus Ratisbonensis* verwerten – erst das ausgehende 15. Jahrhundert also bringt mit dem immer konsequenteren Einsatz arabischer Ziffern die durchgängige Forderung nach dem Auswendiglernen des kleinen Einmaleins. Dies verlangt auch Adam Ries unmittelbar vor seiner Einmaleinstafel mit arabischen Ziffern (Abb. 9).

Und jetzt kann man die Frage beantworten, ob Rhythmomachie oder Arithmomachie!

3.4 Rhythmomachie oder Arithmomachie?

Die Etymologie des Wortes *Rithmomachie* ist nicht trivial. *ἡ μάχη* bezeichnet unstrittig einen Kampf. Aber dann scheiden sich die Geister bis heute zwischen *ἀριθμός* ‘Zahl’ und *ῥυθμός* ‘Harmonie, Proportion’. Handelt es sich also um eine Arithmomachie, einen Zahlenkampf, oder eine Rhythmomachie, einen Proportionenkampf?

Auf der Basis unserer Untersuchung ist klar, dass der Umgang mit Zahlenverhältnissen den eindeutigen Primat vor der schriftlichen Rechenfertigkeit hat. Die ursprüngliche Intention war daher ohne Zweifel eine Rhythmomachie. Rechenfertigkeit gewann man mit dem Zahlenkampfspiel kaum, solange die römischen Zahlen verwendet wurden. Griechische Alphabetzahlen waren nur wenig besser (Abb. 10).



The third table is headed: *numeri rithmimachie*, 'number-battle'. Bubnov lists manuscripts in which the rules of the game occur (Bubnov 1899: xcvi–xcviii). This appears to be a unique example of a table employing Greek numerals, and giving simply the 'pieces' used in the game with no rules. Reading down (see also below), in the left-hand column, we have the even numbers, 2,4,6,8, which play the odd, 3,5,7,9, their multiples, 4,16,36,64, which play the multiples 9,25,49,81; the middle two rows contain the superparticulars: 9 contains 6 plus half of 6, 25 contains 20 plus a quarter of 20, and so on. The last two rows contain the superpartients: 25 has 15 plus two-thirds of 15, 81 has 45 plus four-fifths of 45, and so on. Each side in the game has four pairs of superparticulars and four pairs of superpartients.

2	4	6	9	15	25
4	16	20	25	45	81
6	36	42	49	91	169
8	64	72	81	153	289

plays:

3	9	12	16	28	49
5	25	30	36	66	121
7	49	56	64	120	225
9	81	90	100	190	361

Abb. 10: Rithmomachiezahlen mit griechischen Alphabetzahlen (Oxford, St. John's College MS 17, 56v; Evans 1977: 26-27)

Folkerts analysiert völlig korrekt: „*rhythmós* ist dabei wahrscheinlich keine verderbte Form von *arithmós*, sondern bezeichnet wie das lateinische *numerus* … das Zahlenverhältnis … Die Rithmimachie ist nämlich kein Spiel mit Zahlen, sondern mit Zahlenverhältnissen, und die Zahlenverhältnisse wurden in der mittelalterlichen Musiktheorie mit den Ausdrücken *rhythmus* oder *numerus* bezeichnet“ (Folkerts 1989: 331, ebenso Folkerts in ²VL).

Die gleiche Ansicht äußert bereits Friedlein (Friedlein 1864: 327). Sie wird im *Lexicon philologicum* des Matthias Martinius bestätigt: „*9. Numerus* est harmonia, *ῥυθμός*, metonymice et metaphorice. Nam concentus conficitur certis velut numeris. Concentus nempe exsistit ex diversis sonis, acutis & gravibus, quarum proportio certis numeris exprimi potest“ (Martinius 1623: 2317).

Eine sehr ausführliche Analyse in die gleiche Richtung findet sich in Vossens Kommentar (Vossen 1962: 124) zum *Libellus scholasticus* des Walther von Speyer aus dem Jahre 984, der den Ausdruck *rithmica* statt dem erwarteten *arithmetica* verwendet (lib. scol. I,148).

Die Fehlinterpretation einer Arithmomachie findet sich erstmals bei Peiper (1880: 203), dann bei Gillian Evans 1976, dass nämlich die Rythmomachie neben einer Vermittlung der Zahlenlehre des Boethius „helped the student of practical calculation to calculate with greater speed and facility“ (Evans 1976: 271), aber auch ganz aktuell bei Michael Stolz in seinen Artes-liberales-Zyklen (Stolz 2004: I 34).

Diese Fehlinterpretation ist aus heutiger Sicht eine ganz natürliche. Wenn wir das Spiel mit unseren Augen betrachten, dann ist es eben ein Zahlenkampf und kein Proportionenkampf, weil uns die zugrunde liegende Proportionenlehre weder vertraut noch wichtig ist.

Interessant hieran ist aber eine andere Beobachtung: Das Spiel selbst trug von Anfang an das Potential zu einer Arithmomachie in sich. Die Interpretation seiner Funktionalität hat sich vermutlich schon im ausgehenden Mittelalter in diese Richtung gewandelt, als die Proportionenlehre an Wichtigkeit verlor und die schriftliche Rechenfertigkeit an Stellenwert gewann, wie sich an Spielbrettdarstellungen mit arabischen Zahlen zeigt.

Ein dritter Zweck eröffnet sich Anfang des 17. Jahrhunderts, als die Rithmomachie in ihrer Wertschätzung durch den Adel mit dem Schachspiel gleichzog. Herzog August der Jüngere von Braunschweig-Wolfenbüttel (1579-1666) beschreibt 1616 unter dem Pseudonym Gustavus Selenus das Schachspiel und die Rithmomachie nebeneinander im gleichen Buch. Damit wird das Spiel von praktischen Notwendigkeiten gelöst und dient dem reinen Zeitvertreib.

Ein vierter Zweck liegt in der rein mathematischen Diskussion von Spielstrategien und Siegbedingungen, die mit der Rezeption in der Informatik beginnt.

Gillian Evans (1976: 270) spricht von „adaptability to modification" durch verschiedene kulturelle Umgebungen. Das verlangt Präzisierung. Anpassungen erfolgten nur an der Oberfläche; so konnten Spielsteinfarben und –formen geändert sowie Schlagregeln und Siegbedingungen mathematisch komplexer gestaltet werden. Das Spielprinzip aber bedurfte gar nicht der Anpassung, es bedurfte nur einer anderen Sicht darauf. Verschiedene kulturelle Umgebungen konnten der Rithmomachie also einen jeweils eigenen Zweck und Wert, eine jeweils neue Funktionalität zuordnen, ohne ihr Prinzip zu verändern.

3.5 Schlussbemerkung

Ich schlage nun den Bogen zurück zum Anfang.

Vor dem Hintergrund der inzwischen geführten Diskussion können nun Sie selbst die Frage des Vortragstitels entscheiden, ob die Rithmomachie in den ersten Jahrhunderten ihres Bestehens ein Spiel – ein leichter Umgang – mit Zahlen oder eher ein Kampf – ein schwieriger Umgang – mit Zahlen war.

Peiper kommentiert 1880: „Es könnte scheinen, dass das Spiel eine große Geläufigkeit in der Kenntnis des Einmaleins voraussetzte – und das kann selbst heute manchen abhalten, eine Probe mit diesem Spiele zu machen. Aber wahr ist doch, was Hankel sagt, dass man sich im Mittelalter nicht gerade mit dem Auswendiglernen desselben gequält hat" (Peiper 1880: 208).

Die Zahlenkampfspieler des Mittelalters wussten sich anders zu helfen und den Kampf mit den Zahlen zu erleichtern, sie wussten die Rithmomachie zu einer *iocunda utilitas* und *utilis iocunditas* werden zu lassen (Peiper 1880: 169 – Fortolfs Prolog – und 210). Dazu gehe ich über den sehr kurzen Regensburger Anonymus hinaus und zitiere Peiper, der die sehr ausführliche Fassung des Fortolf von 1130 ediert hat, aus der auch die eben genannte Bewertung stammt:

„Man hatte stets [wie der Traktat 1,12 zeigt] das Cribrum zur Hand, ja an das Spielbrett selbst angeheftet" (Peiper 1880: 208) – als *tabulae appendix* (Abb. 11).

Cribrum, wörtlich 'Sieb', hier besser 'Netz, Gitter, Raster', meint – eine Einmaleinstabelle, auch *mensa Pythagorica* oder *abacus mensurandi* genannt (Hankel 1874: 310).

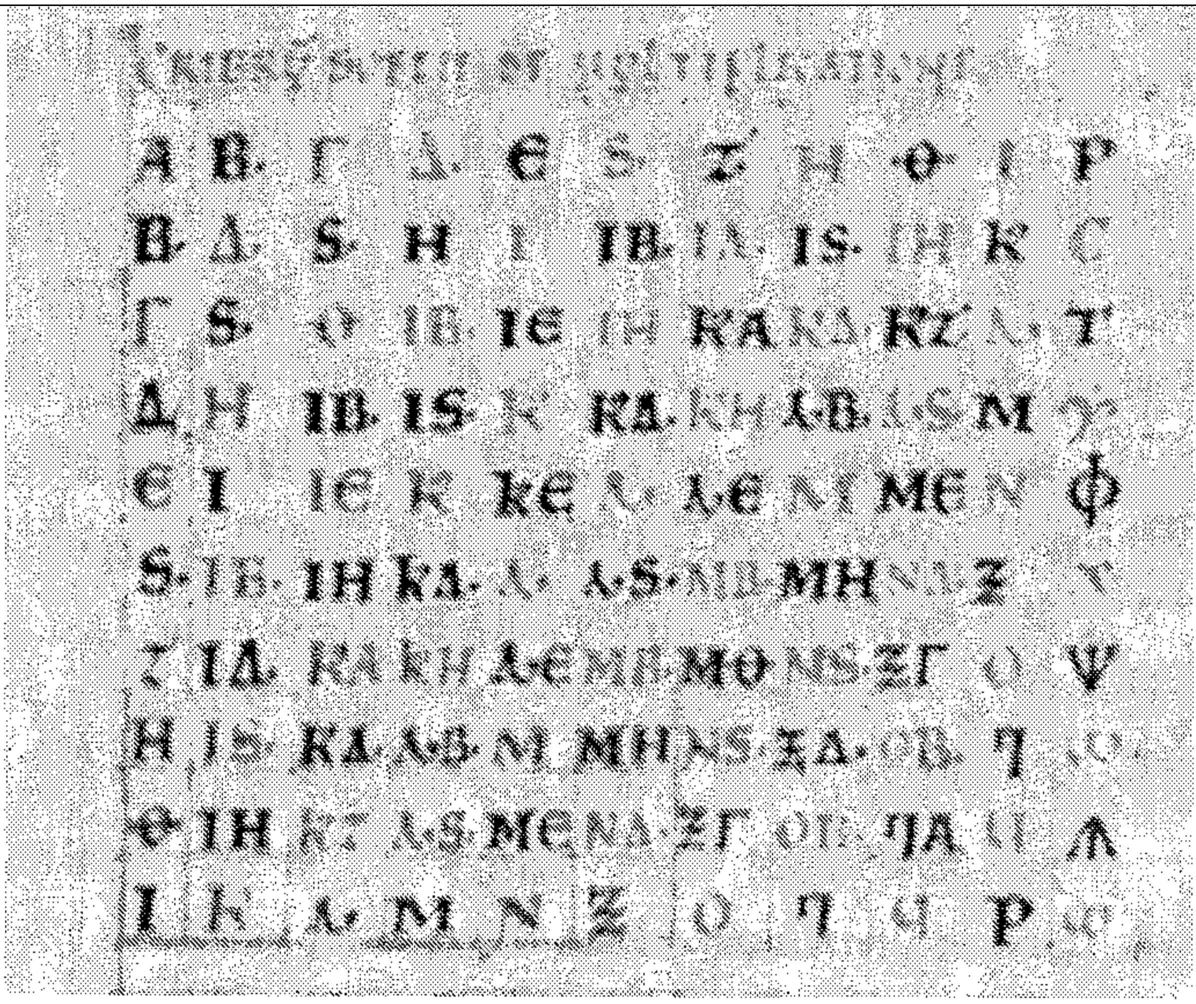


Figure 2 (opposite page). Three tables, in Greek numerals. Oxford, St John's College, MS 17, f. 56v. The first table, at the top of the page, is headed: *Cribrum Boetii de Multiplicatione*, "A Boethian 'crib' for multiplication" (see also the drawing directly below). This is a multiplication table up to 100, with the 100s up to 1000 in the extreme right-hand column. It employs a notation system in which the letters of the Greek alphabet stand for numbers up to ten, and then for 20, 30, 40, to 100, and then for the hundreds up to 1000, in alphabetical order. An important feature of this method is that it, like the Arabic system, allows notation of numbers above 9 without the use of columns.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	200
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	300
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	400
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	500
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	600
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	700
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	800
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	900
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	1000

Abb. 11: Cribrum mit griechischen Alphabetzahlen (Oxford, St. John's College MS 17, 56v; Evans 1977: 26-27)

Diese wurde aber nicht etwa zum Ablesen von Produktwerten für das *eruptio*-Schlagen verwendet, wie man annehmen könnte, sondern, wie Fortolf ganz im Sinne von Boethius (arithm. 1,26) detailliert erklärt (1,12 in Peiper 1880: 177-179), für das Ablesen von Proportionen, inbesondere *superparticulares*, Viereckszahlen und anderen Dingen *ad scientiam utilissima et ad exercitationem iocundissima*.

Sie sehen, wie selbst der scheinbar so selbstverständliche Zweck eines einfachen mathematischen Hilfsmittels wie einer Einmaleinstabelle von seinem kulturhistorischen Kontext abhängt.

4. Bibliographie

4.1 Allgemeines

Cantor, Moritz: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. 1: Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Leipzig 4. Aufl. 1922, 2. Aufl. 1913, 1. Aufl. 1880.

Evans, Gillian R.: Difficillima et Ardua. Theory and practice in treatises on the abacus 950-1150. Journal of Medieval History 3(1977) 21-38.

Folkerts, Menso: Rechenkunst. In: Lexikon des Mittelalters. Stuttgart 1999.

Friedlein, Gottfried: Das Rechnen mit Kolumnen vor dem 10. Jh. (Kap. III). Zeitschrift für Mathematik und Physik (Leipzig) 9(1864) 297-330.

Friedlein, Gottfried (ed.): Boetii de institutione arithmetica libri duo; de institutione musica libri quinque; accedit geometria, quae fertur Boetii. Leipzig 1867 [= ND Frankfurt 1966].

Hankel, Hermann: Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. Leipzig 1874 [= ND Hildesheim 1965].

Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt: 2. Aufl. 1991 [= Histoire universelle des chiffres. Paris 1. Aufl. 1981].

Krischer, Tilman: Inst. arithm. 1,1 und 2,54. In: Geschichte der Musiktheorie. Bd. 3: Rezeption des antiken Fachs im Mittelalter. Darmstadt 1990, 203-217.

Manitius, Max: Geschichte der lateinischen Literatur des Mittelalters [Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft]. 3 Bde. München 1965-1974, 1. Aufl. 1911-1931.

Martinius, Matthias: Lexicon philologicum, praecipue etymologicum, in quo latinae et a latinis auctoribus usurpatae tum purae tum barbarae voces ex originibus declarantur, comparatione linguarum (…) subinde illustantur (…). Bremen 1623.

Menninger, Karl: Zahlwort und Ziffer. Aus der Kulturgeschichte unserer Zahlsprache, unserer Zahlschrift und des Rechenbretts. 3. Aufl. 1979 = 2. Aufl. Göttingen 1958, 1. Aufl. Breslau 1934.

Murray, H. J. R.: A history of board-games other than chess. New York 2. Aufl. 1978.

Nagl, Alfred: Über eine Algorismusschrift des 12. Jh. und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im christlichen Abendland. Zeitschrift für Mathematik und Physik, historisch-literarische Abteilung (Leipzig) 34(1889) 129-146, 161-170.

Ries(e), Adam: Rechnung auf der Linien und Federn. Frankfurt 1525 [= ND 1978].

Stolz, Michael: Artes-liberales-Zyklen. Formation des Wissens im Mittelalter. 2 Bde. Tübingen, Basel 2004.

Vogel, Kurt: Der Donauraum, die Wiege mathematischer Studien in Deutschland. München 1973.

Vossen, Peter (ed.): Der Libellus Scolasticus des Walther von Speyer. Ein Schulbericht aus dem Jahre 984. Berlin 1962.

4.2 Rithmomachie

August, Herzog von Braunschweig-Lüneburg/Wolfenbüttel = Selenus, Gustavus: Das Schach- oder König-Spiel, angefüget Rythmo-Machia. Leipzig 1616.

Borst, Arno: Das mittelalterliche Zahlenkampfspiel. Heidelberg 1986.

Borst, Arno: Rithmimachie und Musiktheorie. In: Geschichte der Musiktheorie. Bd. 3: Rezeption des antiken Fachs im Mittelalter. Darmstadt 1990, 253-286.

Breidert, Wolfgang: Rhythmomachie und Globusspiel, Bemerkungen zu zwei mittelalterlichen Lehrspielen. Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft 10(1973) 155-171.

Bünz, Enno: Erfand der spätere Bischof Adalbero von Würzburg das Zahlenkampfspiel? Dt. Archiv für Erforschung des Mittelalters 49(1993) 189-199.

Chicco, Adriano: La Rithmomachia. In: Bonus Socius (Bijdragen tot de cultuurgeschiedenis van het schaakspel en andere bordspelen, Jubileumuitgave voor Meindert Niemeijer ter gelegenheid van zijn 75ste verjaardag). ’s-Gravenhage 1977, 81-101.

Curtze, Maximilian: Die Handschrift No. 14836 der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik (Leipzig) 7(1895) 75-142 [= Zeitschrift für Mathematik und Physik 40(1895) Supplement 75-142]; darin: *De aggregatione naturalium numerorum*, 105-118.

Evans, Gillian R.: The rithmomachia: a mediaeval mathematical teaching aid? Janus (Leiden) 63(1976) 257-273.

Folkerts, Menso: Rithmimachia. In: [Verfasserlexikon ²VL =] Ruh, Kurt; Wachinger, Burkhart (ed.): Die deutsche Literatur des Mittelalters. Verfasserlexikon. Berlin, New York 2. Aufl. 1978 ff.; Bd. 8, Sp. 86-94.

Folkerts, Menso: Rithmimachie. In: Folkerts, Menso; Knobloch, Eberhard; Reich, Karin (ed.): Maß, Zahl und Gewicht. Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung. Weinheim 1989, 331-344.

Folkerts, Menso: Die Rithmachia des Werinher von Tegernsee. In: Folkerts, Menso (ed.): Vestigia mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard. Amsterdam 1993, 107-142.

Illmer, Detlef; Gädeke, Nora et al.: Rhythmomachia. Ein uraltes Zahlenspiel. München 1987.

Peiper, R.: Fortolfi Rythmimachia. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik (Leipzig) 3(1880) 167-227 [= Zeitschrift für Mathematik und Physik 25(1880) Supplement 167-227].

Richards, J. F. C.: A new manuscript of a rithmomachia. Scripta mathematica 9(1943) 87-99, 169-183, 256-264.

Smith, David Eugene; Eaton, Clara C.: Rithmomachia, the great mediaeval number game. The American mathematical monthly 18(1911) 73-80.

Wappler, E.: Bemerkungen zur Rhythmomachie. Zeitschrift für Mathematik und Physik, historisch-literarische Abteilung (Leipzig) 37(1892) Supplement 1-17.