U N I V E R S I T Ä T R E G E N S B U R G

Fakultät für Physik

Anleitung zum Anfängerpraktikum A1

4 - Trägheitsmoment und Drehimpuls

25. überarbeitete Auflage 2022
Prof. Dr. Jascha Repp
Dr. Stephan Giglberger
Prof. Dr. Christian Schüller

Version 3. Dezember 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 3
1.1 Lernziele 3
1.2 Vorkenntnisse 3
2 Grundlagen 3
3 Fragen zum Versuch 5
4 Hinweise zum Versuchsaufbau 6
4.1 Atwoodsche Fallmaschine 6
4.2 Kreisel 7
5 Aufgabenstellung 7
5.1 Atwoodsche Fallmaschine 7
5.2 Kreisel 8

Trägheitsmoment und Drehimpuls

1 Einleitung

Die physikalischen Gesetze für Drehbewegungen sind weniger intuitiv als jene zur linearen Bewegung, spielen aber in vielen Bereichen der Physik eine große Rolle – von der Astrophysik bis zur Teilchenphysik.

Experimente zum Verhalten eines Kreisels gibt einen direkten experimentellen Zugang für das Verständnis der Gesetze für Drehbewegungen.

1.1 Lernziele

In diesem Versuch stehen die folgenden physikalischen Inhalte im Vordergrund.

- Bestimmung eines Trägheitsmomentes über Einwirkung eines Drehmomentes
- anschauliches Verständnis der Präzession eines Kreisels
- experimentelle Bestimmung der Zusammenhänge zwischen Trägheitsmoment, Drehimpuls, Drehmoment

1.2 Vorkenntnisse

Vorlesungsinhalte zu

- Zusammenhänge zwischen Trägheitsmoment, Drehimpuls, Drehmoment
- Berechnung des Trägheitsmomentes
- Kreisel

2 Grundlagen

Für eine ausführliche Einführung in die physikalischen Grundlagen der Kreisbewegung sei auf entsprechende Literatur verwiesen. Kurz zusammengefasst gilt:

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses $\vec{L}$ ist gleich dem Drehmoment $\vec{M}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M},$$

wobei sich das Drehmoment aus dem Kreuzprodukt aus Kraftarm $\vec{r}$ und Kraft $\vec{F}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ergibt. Das Trägheitsmoment I berechnet sich aus der Massendichteverteilung $\rho(\vec{r})$ gemäß

$$I = \int_{\text{Volumen}} r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) \mathrm{d}^3\vec{r},$$

wobei $r_{\perp}$ die Entfernung des Ortes $\vec{r}$ zur Rotationsachse ist. Für eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ entlang einer Figurenachse (allgemeiner: entlang einer Hauptträgheitsachse) des Körpers durch dessen Schwerpunkt ist

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Im Folgenden werden in diesem Versuch benötigte Zusammenhänge spezifisch für die Atwoodsche-Fallmaschine hergeleitet.

1. Atwoodsche-Fallmaschine ohne Reibung
   Sei x die Koordinate in Fallrichtung, M eine einzelne große Masse und m die Zusatzmasse an der Atwood-Maschine, dann gilt bei fehlender Reibung wegen der Erhaltung der mechanischen Energie
   $$m \cdot g \cdot x = \frac{1}{2} \cdot (2M + m) \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$
   wobei I das Trägheitsmoment der Umlenkrolle ist.

   Mit $\omega = \dot{x}/r$ (r = Radius der Umlenkrolle) folgt nach Zeitdifferentiation und Umformen

   $$\ddot{x} = \frac{m}{2M + m + I/r^2} \cdot g = a.$$

   Damit ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Fallhöhe x und Fallzeit t:

   $$x = \frac{1}{2} a t^2.$$

   Durch Einsetzen von a und Auflösen nach dem Trägheitsmoment I erhält man:

   $$I = \frac{mgr^2}{2x} \cdot t^2 - (2M + m) r^2.$$

Werden bei verschiedenen Trägheitsmomenten I_1 und I_2 unter sonst gleichen Bedingungen die zugehörigen Fallzeiten t_1 und t_2 gemessen, so findet man

$$I = I_2 - I_1 = \frac{mr^2 g}{2x} \cdot (t_2^2 - t_1^2).$$

Man kann auf diese Weise das Trägheitsmoment $I = I_2 - I_1$ eines zusätzlich angebrachten Körpers direkt bestimmen.

Im Versuch ist I_1 das Trägheitsmoment der Umlenkrolle allein, I_2 das Trägheitsmoment von Umlenkrolle **plus** Kreisscheibe bzw. Kreiselkörper. t_1 bzw. t_2 sind die entsprechenden Fallzeiten.

2. Atwoodsche-Fallmaschine mit Reibung
   Berücksichtigt man die mechanische Reibungskraft $K_R = -\mu\,(2M+m)\,g$ und die Drehbewegung der Umlenkrolle, so lautet das Aktionsprinzip

$$\left(2M + m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x} = mg - \mu\,(2M+m)\,g.$$

   Daraus berechnet man analog zu oben die Differenz I der Trägheitsmomente I_2 und I_1:

$$I = I_2 - I_1 = \left(1 - \mu\frac{2M+m}{m}\right)\frac{mr^2 g}{2x}\left(t_2^2 - t_1^2\right).$$

3 Fragen zum Versuch

1. Berechnen Sie jeweils bezüglich der Symmetrieachse
   a) das Trägheitsmoment I_Z eines homogenen Zylinders (Masse M, Radius R),
   b) das Trägheitsmoment I_K des verwendeten Kreiselkörpers (siehe Abbildung 3) (Dichte von Aluminium: $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, Längenangaben in mm)

2. Berechnen Sie die Rotationsenergie E_{rot} des Kreiselkörpers, wenn er sich mit ν = 10 Hz bzw. 100 Hz dreht.

3. Bestimmen Sie zum Versuchsaufbau der Atwoodschen Fallmaschine (siehe Abb. 3) die Beschleunigung a der Massen zunächst ohne Berücksichtigung des Trägheitsmoments sowohl aus der Energiebilanz als auch aus der Kräftebilanz. Überlegen Sie, welche Änderungen in der Energiebilanz auftreten, wenn das Trägheitsmoment I_U der Umlenkrolle nicht mehr vernachlässigt werden kann. Berechnen Sie für diesen Fall aus der Energiebilanz die Beschleunigung.

4. Wie ist das Drehmoment $\vec{M}$ definiert?

5. Auf einen Kreisel mit horizontaler Drehachse und dem Drehimpuls L wirkt die Schwerkraft K_S und erzeugt ein Drehmoment M. Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω_p der Präzession des Kreisels.

6. Die Reibung hat zwei Wirkungen:

   a) Sie verkleinert die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels. Ändert sich dadurch die Präzessionsgeschwindigkeit ω_p?

   b) Sie bremst die Präzessionsbewegung. In welche Richtung zeigt die Reibungskraft und welches Drehmoment verursacht sie? Wie ist die Wirkung dieses Drehmoments?

7. Welche Anwendungen des Kreiselprinzips kennen Sie?

4 Hinweise zum Versuchsaufbau

4.1 Atwoodsche Fallmaschine

Mit der Atwoodschen Anordnung ist es möglich, durch Messung zweier Fallzeiten das Trägheitsmoment eines auf die Drehachse gesetzten Körpers zu bestimmen. Über einer leicht drehbaren Rolle

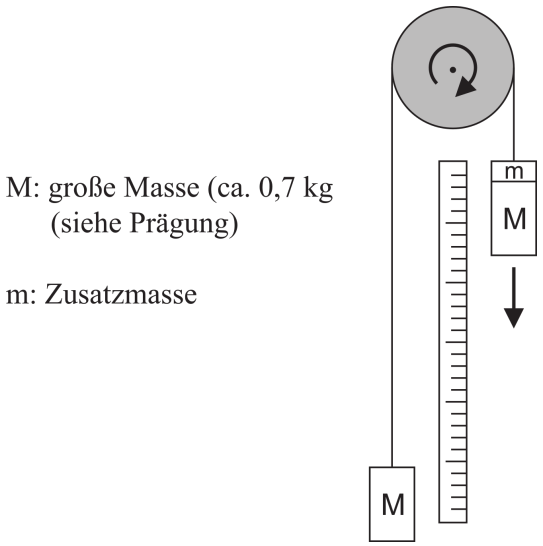

Abbildung 1: Prinzip der Atwoodschen Fallmaschine

hängt ein Faden, an dessen Enden zwei gleiche Massen M befestigt sind. Die Gewichte werden durch einen Elektromagneten in der Startposition gehalten. Sobald dieser abgeschaltet wird, setzt sich das System unter dem Einfluss der Zusatzmasse m in Bewegung. Die Zeiten werden mit der elektronischen Stoppuhr gemessen, die Wege an dem Maßstab abgelesen.

4.2 Kreisel

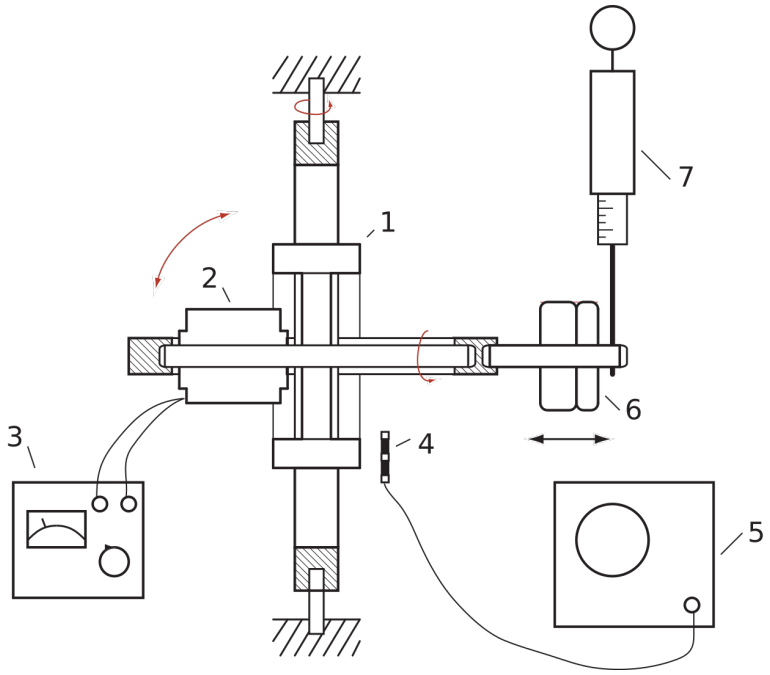

Abbildung 2: Kreiselkörper mit 1: kardanisch gelagerter Kreisel 2: Motor 3: Stromversorgung 4: Induktionsspule 5: Oszilloskop 6: Zusatzmasse 7: Federwaage

5 Aufgabenstellung

5.1 Atwoodsche Fallmaschine

Montieren Sie den Kreiselkörper fest auf die Achse der Umlenkrolle. Messen Sie mit der elektronischen Stoppuhr die Fallzeiten für z.B. 4 verschiedene Fallstrecken bei fester Zusatzmasse (z.B. $m = 30$ g) jeweils einmal.
Wiederholen Sie diese Messung nach Entfernen des Kreisels.
Bestimmen Sie nach der Ableitung des Anhangs das Trägheitsmoment des Kreisels graphisch mittels geeigneter Auftragung mit und ohne Berücksichtigung der Reibung. Verwenden Sie für die Berechnung mit Reibung den Wert $\mu = 0,002$.

Stellen Sie eine Fehlerbetrachtung an und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Wert, den Sie aus der entsprechenden Vorbereitungsaufgabe erhalten haben.

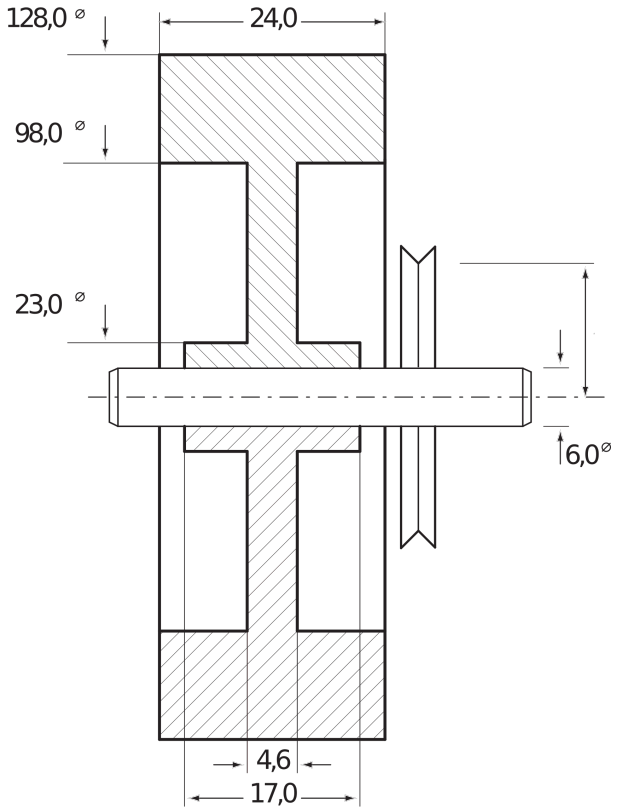

Abbildung 3: Bemaßung des Kreiselkörpers

5.2 Kreisel

Der Drehimpuls berechnet sich einerseits aus Trägheitsmoment und Kreisfrequenz, andererseits lässt er sich mittels der Präzession experimentell bestimmen. Am schnellen Kreisel werden die Ergebnisse beider Methoden verglichen.

!!! VORSICHT !!!

Ein Kreisel enthält sehr viel mechanische Energie.
Fassen Sie daher den rotierenden Kreiselkörper nicht an und lassen Sie beim Bewegen der Drehachse große Vorsicht walten.

Stellen Sie zu Beginn (noch ohne angeschlossenen Motor) an der Stromversorgung (3) die Spannung $U = 6$ V ein und die Strombegrenzung auf $I = 1,25$ A. Wegen der geringen Motorleistung braucht der Kreisel (1) einige Minuten bis er seine Endgeschwindigkeit erreicht. Die Umdrehungszeit T wird mit dem Oszillographen (5) als Abstand zweier Spannungsimpulse gemessen, die von einem im Kreiselrand eingelassenen Magneten in der Induktionsspule (4) erzeugt werden. Messen Sie die

Umdrehungszeit T schon während der Anlaufphase des Kreisels und **regeln Sie bei** $T \cong 30$ **ms die Strombegrenzung auf** $I = 0,6$ **A zurück**, da eine zu hohe Geschwindigkeit zu einer Beschädigung des Kreisels führen kann.

Das Drehmoment wird durch Aufschrauben von zusätzlichen Messingscheiben auf die Drehachse erzeugt und mit Hilfe der Federwaage (7) bestimmt.

1. Tarieren Sie die Kreiselachse in Ruhe mit den bereits aufgeschraubten Messingscheiben aus. Dann setzen Sie den Kreisel in Drehbewegung (siehe oben). Bei niedriger Geschwindigkeit empfiehlt es sich, die Kreiselachse etwas festzuhalten, da eine Restunwucht zu starker Nutation führen kann.

   Überzeugen Sie sich durch Bewegen der Kardanaufhängung davon, dass der Drehimpulsvektor (entlang die Drehachse) richtungsfest ist.

2. Bestimmen Sie die schließlich erreichte Winkelgeschwindigkeit ω des Kreisels. Achten Sie besonders auf stehende Bilder am Oszillographen. Halten Sie für alle weiteren Versuche die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels konstant!

3. Halten Sie die Drehachse vorsichtig fest und bringen Sie eine zusätzliche Messingscheibe an. Durch eine senkrecht nach oben wirkende, äußere Kraft können Sie das durch die zusätzlichen Messingscheiben erzeugte Drehmoment kompensieren und die Präzession zum stoppen bringen. Messen Sie mit der Federwaage diese äußere Kraft und bestimmen Sie so das entstandene Drehmoment M.

4. Lassen Sie die Achse los und messen Sie die Umlaufzeit T_p des präzidierenden Kreisels (1/2 Umlauf) mit der Stoppuhr. Berechnen Sie daraus die Winkelgeschwindigkeit ω_p der Präzession.

5. Wiederholen Sie die letzten beiden Schritte mit 4 verschiedenen Drehmomenten M. Tragen Sie die Ergebnisse in geeigneter Weise graphisch auf und bestimmen Sie daraus den Drehimpuls L des Kreisels.

6. Berechnen Sie den Drehimpuls L aus der Drehgeschwindigkeit und dem Trägheitsmoment I_K des Kreisels, das vorher bestimmt wurde. Vergleichen Sie mit der vorangegangenen Aufgabe und diskutieren Sie die Fehler.