Workshop:

Zwei Aufgaben aus dem COACTIV-Fachdidaktiktest

Stefan Krauss & Georg Bruckmaier
Didaktik der Mathematik
Universität Regensburg

1. Thementag Theorie-Praxis 2013
Kompetenzorientierung in Unterricht und Leistungsmessung
09.10.2013, Universität Regensburg

Christa (26, Akademikerin)

Interviewer: (legt folgende Aufgabe vor): An einer Universität sind P Professoren und S Studenten. Auf einen Professor kommen 6 Studenten. Drücken Sie diese Beziehung zwischen S und P durch eine Gleichung aus.

Christa: (schreibt) $6S = P$

Interv.: Nehmen wir einmal an, es sind 10 Professoren. Wie viele Studenten sind es dann?

Christa: 60.

Interv.: Setzen Sie das in die Gleichung ein!

Christa: $6 \cdot 60 = 10$. Aha, das kann nicht stimmen. (Nach einer Pause schreibt sie)

$$P + 6S = P + S$$

Christa:	$6 \cdot 60 = 10$. Aha, das kann nicht stimmen. (Nach einer Pause schreibt sie)
	$P + 6S = P + S$
Interv.:	Was bedeutet das?
Christa:	Die Professoren und die auf jeden Professor fallenden 6 Studenten ergeben zusammen alle Professoren und Studenten
Interv.:	Hhmm … bei dieser Gleichung könnte man auf beiden Seiten P subtrahieren. Was ergibt sich dann?
Christa:	(streicht P auf beiden Seiten durch) $6S = S$.
Interv.:	Kann das stimmen?
Christa:	Ja natürlich … die Gruppen zu 6 Studenten ergeben zusammen alle Studenten.

Interv.: Setzen Sie wieder die Zahlen ein!

Christa: 10 Professoren und 60 Studenten. Dann ist das $6 \cdot 60 = 10$. Das kann nicht stimmen. (Nach einer Pause schreibt sie) $P + S = 7$.

Interv.: (räuspert sich)

Christa: (bessert aus zu) $P + 6S = 7$

Interv.: Was bedeutet das?

Christa: Ein Professor und seine 6 Studenten sind zusammen 7 Personen.

(abgebrochen)

Aufgabe 1: „Professoren und Studenten“

Es gibt verschiedene Gründe für diesen Fehler, die aus Interviews mit Schülern rekonstruiert werden konnten.

Diese Aufgabe ist deswegen so schwierig, da sich diese Gründe bei dieser Aufgabe vermischen können.

Versuchen Sie (in Gruppen zu je 4 – 5 Personen),

a) mögliche Gründe für das Auftreten dieses Fehlers zu finden („Was haben die Schüler gedacht?“), und

b) überlegen Sie sich jeweils eine geeignete Intervention.

Potentielle Gründe für den Fehler und mögliche Interventionen

Falsches Gleichungsverständnis

→ *Betonen, dass man „kommen auf“ oder „entsprechen“ nicht einfach durch „=“ ausdrücken kann*

P = 6S

Falsches Multiplikationsverständnis

„Das 6-fache muss beim Größeren stehen!“

→ *Multiplikationsschreibweise erläutern*

Falsche Variablenvorstellungen

(mit Maßeinheiten wäre alles richtig):

→ *Einsetzungsaspekt betonen*

„**Wort-für-Wort Übersetzung**“, dieser Fehler bezieht sich nicht auf spezifische Bestandteile der Gleichung, sondern auf deren Reihenfolge:

→ *Aufgabenstellung umformulieren*

Aufgabe 2: „Hoch 0“

Schüler haben immer wieder Schwierigkeiten, die Definition $a^0 = 1$ einzusehen.

a) *Welche Ursachen könnten dieser Schwierigkeit zugrunde liegen?*
   Bemerkung: Im Gegensatz zur „Professoren- und Studenten“-Aufgabe gibt es hier nicht verschiedene Gründe für den selben Fehler, sondern es tauchen in Schülerinterviews sogar *verschiedene* Fehler auf! Versuchen Sie, zuerst diese Fehler zu sammeln!

b) *Bitte skizzieren Sie kurz möglichst viele Wege, mit denen man Schülern diese Definition verständlich machen könnte!*

a) Folgende *verschiedene* Fehlvorstellungen zu $a^0 = 1$ werden aus Schülerinterviews deutlich:

Mögliche Musterlösung zu a:

Diese Definition kann folgenden falschen Grundintuitionen zuwider laufen:

1) „a hoch etwas", das wird doch immer größer als a (z.B. bei a^2 oder a^3 mit natürlichen Zahlen für a; diese Sichtweise betrachtet allerdings nur Potenzen für $a > 1$). Ein Schüler mit dieser Sichtweise wird glauben, dass a^0 größer als a sein muss und somit nicht 1 sein kann.

2) Null mal den Faktor a, das kann man sich nicht vorstellen. Wenn nichts dasteht, dann muss es doch „null" sein.
Dieser Schüler denkt: a^3 ist drei mal a multipliziert, a^2 ist zwei mal a multipliziert, a^1 ist ein mal a, also muss a^0 gleich 0 sein!

3) Der Schüler kann nicht verstehen, dass trotz unterschiedlicher Basen bei dem Exponenten „0“ immer dasselbe Ergebnis – nämlich „1“ – herauskommt. Die Potenz a^b hängt doch schließlich von a *und* b ab, das Ergebnis kann also nicht einfach *für alle a* gleich 1 sein. Dieser Schüler kann sich keine konstante Funktion in Abhängigkeit einer Variablen a vorstellen, dazu muss er sich von einer nur auf Zahlen bezogenen Sichtweise lösen, und das ist für einen Schüler ein „schwerer“ kognitiver Prozess.

4) Hoch 0 „geht nicht“, das darf man gar nicht machen! Dieser Schüler glaubt, dass a^0 *falsch* ist.

5) Hoch 0 „tut nichts“, also bleibt a einfach stehen! Also: $a^0 = a$ (sozusagen eine Interpretation von „Hoch 0“ als neutrales Element des Potenzierens).

Man beachte, dass *alle* Schüler ein vermeintlich *anderes* Ergebnis für a^0 annehmen würden:

1) $a^0 > a$
2) $a^0 = 0$
3) a^0 = unterschiedlich für alle a
4) a^0 = leere Menge (darf man nicht!)
5) $a^0 = a$

Warum kann man sich „Hoch Null nicht vorstellen“?

→ Leider gibt hier es keine (einfache) Sachsituation, die mit „Hoch 0“ beschrieben werden kann (es fehlt also ein konkreter Alltagsbezug).

b) Bitte skizzieren Sie kurz möglichst viele Wege, mit denen man Schülern diese Definition verständlich machen könnte!

Mögliche Lösung zu b:

Siehe hierzu auch nächste Folie

Mit dem Permanenzprinzip, z.B.:

- nummerisch: $2^3 = 8$, ... $2^2 = 4$, ... $2^1 = 2$, ... das geht immer mit „geteilt durch 2" weiter. Also müsste nun 2 „hoch 0" zu 2 : 2 = 1 werden.
- mit Variable: a^3 , ... a^2 , ... $a^1 = a$, ... das geht immer mit „geteilt durch a" weiter. Also müsste nun a „hoch 0" zu a : a = 1 werden.
- Permanenz der Rechengesetze: Es soll weiterhin $a^{x+y} = a^x a^y$ gelten: $a^{x+0} = a^x a^0 = a^x$, nur wenn $a^0 = 1$

- Weitere Möglichkeit: a^0 kann einfach *ausgerechnet* werden:

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Trick dabei: Stelle 1 als Bruch dar, in dem Zähler und Nenner gleich sind und wende dann Potenzrechengesetze an.

Zu b) Didaktisch besonders empfehlenswert:
Permanenzreihe zum „Selberergänzen“

Exponent wird um eins kleiner

$2^{4} = 16$

$2^{3} = 8$

$2^{2} = 4$

$2^{1} =$

$2^{0} =$

$2^{-1} =$

$2^{-2} =$

$2^{-3} =$

Ergebnis (Potenz) wird halbiert

→ Schüler können so *selbständig entdecken*: Hoch 1, Hoch 0, und sogar negativer Exponent!