

## Warum sich Wahrscheinlichkeiten und Prozentangaben oft unserer Intuition widersetzen – und was man dagegen tun kann

Workshop im Rahmen der Fortbildungsreihe

MaMut 2014: Daten und Zufall

Nürnberg, 02.12.2014



Georg Bruckmaier, Karin Binder & Stefan Krauss Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg

Universität Regensburg



## Worum geht es?



- Relevanz von Prozentangaben und Wahrscheinlichkeiten im Alltag und im Lehrplan
- >>> Vorstellung alternativer Darstellungsweisen
- Schwierigkeiten im Umgang mit Prozentangaben und deren Umrechnung
- Didaktische Tipps zur Überwindung häufiger Fehler



### Wozu Wahrscheinlichkeit und Statistik in der Schule?

- >>> Wir sind heutzutage einem "Trommelfeuer" aus Daten, Statistiken, Kurven und Trends ausgesetzt.
- In einer durchschnittlichen Zeitung finden sich mehr Statistiken als Goethe und Schiller in ihrem ganzen Leben gesehen haben.
- Das Wort "Prozent" ist mittlerweile eines der häufigsten Substantive in deutschen Tageszeitungen.

Quelle: Krämer, W. (2009). So lügt man mit Statistik (9. Aufl.). München: Piper.



#### Relevanz von Wahrscheinlichkeiten in unserer Gesellschaft

" [...] Unsere Gesellschaft muss stärker lernen, Risiken zu bewerten, ganz generell gesprochen. Das Leben mit der Chance und dem Risiko ist ein wichtiges gesellschaftliches Problem. Ich finde es in einer komplexer werdenden Welt auch wichtig, Kinder bereits frühzeitig an solche Abwägungen heranzuführen, die sie später immer wieder vornehmen müssen [...]. Im Kindergarten und in der Schule können Kinder spielerisch lernen, was Wahrscheinlichkeit und Risiko bedeuten. Nehmen Sie die morgendliche Diskussion nach Hören des Wetterberichts, ob man nun die Regenjacke mitnimmt oder nicht. Denn die Regenjacke zu schleppen, wenn die Sonne scheint, ist das Unangenehmste, was einem nach der Schule passieren kann. Aber bei 30 Prozent Regenwahrscheinlichkeit keinen Schutz zu haben und nass zu werden, wäre auch ungemütlich. Darüber zu diskutieren, dass man für Schutz höheren Aufwand betreiben und abwägen muss, ob dieser sich lohnt, halte ich für wichtig."

**Quelle:** Auszug aus einem Interview mit zum Thema "Was bedeutet Ihnen die Natur?" (aus "Cicero", 1.1.2007)



## Regenwahrscheinlichkeit



Eine Umfrage unter US-amerikanischen Radiohörern ergab folgende verschiedene Interpretationen für die Meldung

## "30 % Regenwahrscheinlichkeit"

Es wird ...

... mit 30 % Wahrscheinlichkeit im gesamten Sendegebiet regnen.

... mit 30 % Wahrscheinlichkeit irgendwo im Sendegebiet regnen.

... in 30 % der Fläche des Sendegebietes regnen, wann weiß nur nicht wo.

... in 30 % der Zeit regnen, man weiß nur nicht wann.

Am seltensten (die intendierte Interpretation):

In 30 % der Tage mit vergleichbaren Wetterbedingungen regnet es.



## "Prozent" und "Wahrscheinlichkeit" im Lehrplan

Jgst.	Mittelschule	Realschule	Gymnasium
5	-	-	-
6	-	rel. Häufigkeit, <b>Prozent</b>	rel. Häufigkeit, <b>Prozent</b>
7	Prozent	Laplace- <b>Wsk.</b> , rel. Häufigkeit	Prozent
8	Prozent	Laplace-Wsk.	Laplace- <b>Wsk</b> .
9	rel. Häufigkeit, Prozent	Wsk., Pfadregeln	Wsk., Pfadregeln
10	M-Zug: Laplace- <b>Wsk.</b> , Pfadregeln	-	Pfadregeln, bedingte Wsk.
11			Wskbegriff
12			Wskverteilung



## Bildungsziele zur Leitidee L5: "Daten und Zufall"

- Vermittlung stochastischen Denkens ("Zufall") im Kontrast zu funktionalem und zu deterministischem Denken ("Sicherheit")
- >>> Förderung des Entscheidens und Urteilens unter Unsicherheit
- >>> Verhinderung von Fehlvorstellungen durch frühe Instruktion und geeignete Repräsentationen
- Aufbau korrekter und tragfähiger "Sekundärintuitionen" als dynamischer Prozess (spiralförmiges Curriculum)
- Zurechtfinden in der Informationsgesellschaft
- Sensibilisierung gegenüber einem zweifelhaften Gebrauch und bewusster Manipulation durch Statistik

Schulformübergreifend! **Basierend auf**: KMK (2003). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* München: Wolters Kluwer.



## In Schulbüchern: Fragen an die reale Realität?

#### **Produktion:**

"Eine Firma für elektronische Geräte stellt Transistoren her; sie weiß, dass im Durchschnitt 2 % davon defekt sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 20 Transistoren genau 3 defekt sind?"

#### Produktion:

"Eine Tankstelle hat gute und schlechte Kunden; sie weiß, dass im Durchschnitt 2 % der Kunden, ohne zu bezahlen, davon fahren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 20 Kunden eines Tagen genau 3 nicht bezahlen?"

#### Produktion:

"Ein Schnellimbiss bezieht von einem Hersteller Hamburger; er weiß, dass im Durchschnitt 2 % der Hamburger zwei statt einer Gurke als Belag haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 20 verkauften Hamburgern in einer Stunde genau 3 mit einer Gurke belegt waren?"



#### **Produktion:**

**Quelle**: Eichler, A. (2011). *Daten und Zufall – eine realitätsorientierte (Leit-) idee für beide Sekundarstufen*. 16. Dresdner Kolloquium zur Mathematik und ihrer Didaktik. Dresden: TU Dresden.

Zur Leitidee L5 siehe auch:

http://www.leitideedatenundzufall.de





#### In Schulbüchern finden wir leider oft:

Text, Sachsituation und Daten sind irrelevant ("eingekleidete Aufgaben"), nur die Zahlen sind relevant (Modell: Binomialverteilung)

## Die Frage im heutigen Workshop lautet:

**Welche** Wahrscheinlichkeiten, Risiken und Chancen werden in unserer Informationsgesellschaft **tatsächlich** kommuniziert (z. B. im Fernsehen, in Zeitungen und im Radio)? Und wie wird das verstanden?



## Worum geht es?

???

- Relevanz von Prozentangaben und Wahrscheinlichkeiten im Alltag und im Lehrplan
- >>> Vorstellung alternativer Darstellungsweisen
- Schwierigkeiten im Umgang mit Prozentangaben und deren Umrechnung
- Didaktische Tipps zur Überwindung häufiger Fehler



## Darstellungen statistischer Information in Zeitungen

## Jeder Achte fuhr schon Fernbus statt Bahn

Parallel zu vielen ICE-Strecken fahren immer mehr Fernbusse. Es steigt der Anteil derjenigen, die statt in den Zug auch mal in den Bus steigen.



BERLIN. Die Fernbusse machen der Deutschen Bahn nach einer Umfrage zunehmend mögliche Kunden abspenstig. Knapp jeder achte Deutsche (12 Prozent) ist seit Januar 2013 schon einmal in einen Fernbus statt in die Züge der Bahn gestiegen, wie das Meinungsforschungsinstitut YouGov in einer Online-Umfrage ermittelte. Vor einem Jahr waren es noch 5 Prozent.



## Jeder Fünfte sucht einen neuen Job

Der Trend bei der Bewerbung geht dabei derzeit immer mehr in Richtung E-Mail. Als Informationsgeber bei der Jobsuche werden Tageszeitungen bevorzugt.



FRANKFURT/MAIN. Neues Jahr, neues Glück: Das denken nicht wenige auch im Hinblick auf die Karriere. Fast jeder Fünfte (18 Prozent) sucht derzeit dringend einen neuen Job. Das zeigt eine bevölkerungsrepräsentative Umfrage des Marktforschungsinstituts Toluna. Jeder Neunte (11 Prozent) gibt als Grund an, keinen festen Job zu haben. Jeder Fünfzehnte (7 Prozent) ist momentan beschäftigt, will aber möglichst bald wechseln. Etwas mehr als jeder Fünfte (22 Prozent) schaut sich hin und wieder



## Jurastudenten für drakonische Strafen

Jeder dritte Jurastudent am Anfang seiner Ausbildung will die Todesstrafe zurück. Der Wunsch nach hohen Strafen wächst.



Jeder dritte Jurastudent am Anfang seiner Ausbildung will heute die Todesstrafe zurück. Foto: dpa Quelle:

#### VON CATHÉRINE SIMON, DPA

ERLANGEN Es ist paradox: Die Zahl der Morde und Totschläge sinkt in Deutschland seit Jahren, Die Leute fühlen sich so sicher wie fast nie zuvor. Und dennoch wächst bei jungen Jurastudenten der Wunsch nach immer härteren Strafen. Ein Drittel von ihnen befürwortet laut einer Studie sogar die Todesstrafe. Etwa gleich viele finden, dass selbst eine lebenslange Haft bei manchen Straftaten noch zu mild ist. Und die Hälfte der Befragten würde einen







WIRTSCHAFT ARMUT



09.03.14

## Zwei von fünf Alleinerziehenden beziehen Hartz IV

In etwa jeder fünften deutschen Familie ist nur ein Erwachsener allein für die Kinder verantwortlich, mit steigender Tendenz. Und für sie ist das Armutsrisiko besonders hoch: Rund 40 Prozent aller Alleinerziehenden beziehen Hartz IV – während bei Familien mit zwei Elternteilen nur acht Prozent auf die Grundsicherung angewiesen sind. Die Kinderarmut in der Bundesrepublik sei damit zum großen Teil darauf zurückzuführen, dass die betroffenen Kinder in Familien mit nur einem Elternteil aufwachsen – zu diesem Ergebnis kommt eine Studie im Auftrag der Bertelsmann-Stiftung, die der "Welt am Sonntag" vorliegt.

## Die drei Klassiker in Zeitungen:

Prozent, absolute Häufigkeiten und "jeder wievielte" Und in der Schule?

> Kindern über drei Jahren keinen Anspruch mehr auf Betreuungsunterhalt vom Ex-Partner haben. Zum anderen, weil die

Die Welt (09.03.2014)

Unterhaltskosten für Kinder zu niedrig angesetzt seien und zudem in jedem zweiten Fall von den Vätern nicht in voller Höhe gezahlt würden.

Doionial



Numericche Darctellungen

## Verschiedene Darstellungen statistischer Informationen

Num	ierische Darstellungen		Beisbiei
<b>&gt;&gt;</b>	Prozente	e e	25 %
<b>&gt;&gt;</b>	Dezimalbrüche		0,25
<b>&gt;&gt;</b>	Gewöhnliche Brüche		1/4
<b>&gt;&gt;</b>	Absolute Häufigkeiten		1 von 4
<b>&gt;&gt;</b>	"Jeder wievielte"		jeder vierte
<b>&gt;&gt;</b>	Chancenverhältnisse		1 zu 3

Erstaunlicherweise ist die Umrechnung dieser Darstellungen NICHT selbstverständlich ...



## Worum geht es?



- Relevanz von Prozentangaben und Wahrscheinlichkeiten im Alltag und im Lehrplan
- >>> Vorstellung alternativer Darstellungsweisen
- Schwierigkeiten im Umgang mit Prozentangaben und deren Umrechnung
- Didaktische Tipps zur Überwindung häufiger Fehler

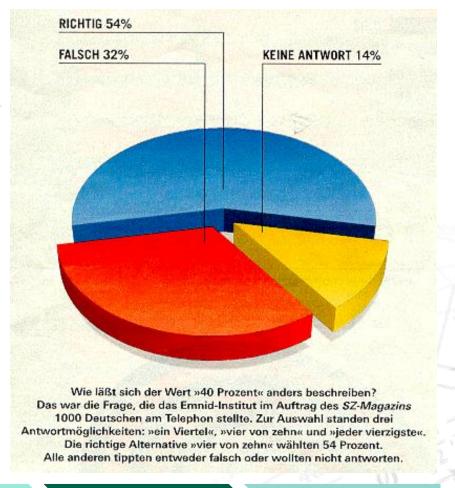


## Schwierigkeiten beim Umrechnen

"Was bedeutet 40 %?"

- ein Viertel?
- >>> vier von zehn?
- jeder vierzigste?

(nach einer Emnid-Umfrage)



Zeitu

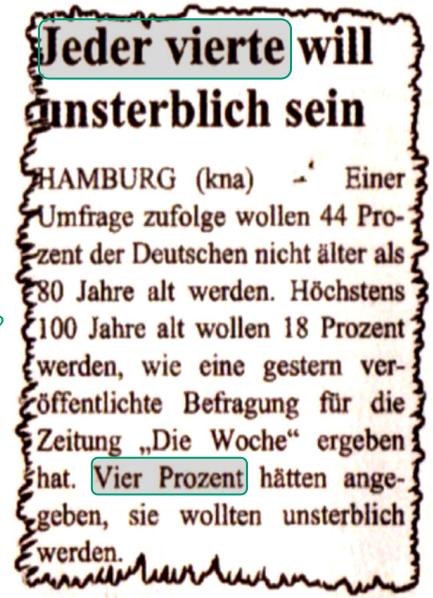
Südo

Que



Wie viele Deutsche wollen nun unsterblich sein:

Jeder vierte (= 25 %) oder 4 %?



(7.8.1997)

Mainzer Allo

Quelle:

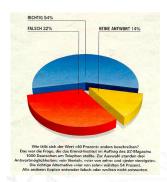


## Workshop-Phase I:

## Umrechnung verschiedener Darstellungsarten



- Formulieren Sie die auf Ihrem Blatt markierten statistischen Informationen in jede der fünf anderen numerischen Darstellungsarten um.
- Welche Schülerfehler können Sie sich bei den Umrechnungen vorstellen?
  - Notieren Sie bitte stichpunktartig, was Ihnen auffällt.



#### Jeder vierte will unsterblich sein

HAMBURG (kna) - Einer Umfrage zufolge wollen 44 Prozent der Deutschen nicht älter als 80 Jahre alt werden. Höchstens 100 Jahre alt wollen 18 Prozent werden, wie eine gestern veröffentlichte Befragung für die Zeitung "Die Woche" ergeben hat. Vier Prozent hätten angegeben, sie wollten unsterblich werden.



## Überblick über Schwierigkeiten und mögliche Fehler

- >>> Fehlvorstellung: "x %" entspricht "Jeder x-te"
- >>> Fehlinterpretation: "Jeder sechste" sind mehr als "jeder fünfte"
- Fehlerhafte Vorstellung des Chancenverhältnisses: "¼" entspricht "1 zu 4" (statt richtigerweise "1 zu 3")
- **>**



## Weitere Beispiele: "Doppelfehler"

Aus der Norderneyer Badezeitung: "Fuhr vor einigen Jahren noch jeder zehnte Autofahrer zu schnell, so ist es mittlerweile heute "nur noch" jeder fünfte. Doch auch fünf Prozent sind zu viele, und so wird weiterhin kontrolliert, und die Schnellfahrer haben zu zahlen."

"Jeder fünfte" besser als "jeder zehnte"?

Wie viele Deutsche sind nun zu schnell: 5 % oder 20 %?

Quelle: Norderneyer Badezeitung (7.8.1997)



## Ehescheidungen

Jede dritte Ehe in Deutschland wird geschieden, in Großstädten sogar jede vierte

Quelle: Wochenpost (7.8.1995)

### Erschreckende Wissenslücken

Erwachsene in Deutschland können im internationalen Vergleich nur mittelmäßig lesen und Texte verstehen. Gleiches gilt für Grundrechenarten wie Prozentrechnen. Dies zeigt der erste PISA-Test zu den Alltagskompetenzen von Erwachsenen in 24 wichtigen Industrienationen der Welt.

Die "PISA für Große"-Studie verschärft die Aussage früherer Studien: Jeder Sechste liest nur so gut wie ein zehnjähriges Kind. Das ist beim Kopfrechnen nur unwesentlich besser, schließlich hapert es hier bei jedem Fünften mit dem Einmaleins.

Der erfreulichste Teil der Studie:



## Weitere Probleme mit dem Prozentbegriff

Anstieg der Rauschgiftopfer gegenüber dem Vorjahr alarmierend

# Anzahl der Drogentoten hat sich 1990 fast verdoppelt

WIESBADEN (dpa) Die Zahl der Rauschgifttoten in der Bundesrepublik ist 1990 alarmierend gestiegen und gegenüber dem vergangenen Jahr um fast 50 Prozent angewachsen.

Wie das Bundeskriminalamt (BKA) in Wiesbaden mitteilte, wurden bis Donnerstag 1365 Menschen Opfer ihrer Drogensucht.

Zeitung (28.12,1990)
Bis zum 27. Dezember 1989 waren der Wiesbadener Behörde 950
Rauschgifttote bekanntgeworden. Die neueste Zahl der Drogenopfer

Goslarschehließt erstmals die fünf neuen Bundesländer ein

Mögliche Frage an Schüler:

Quelle: Welche Angabe stimmt: "Verdoppelt" oder "um 50 % gestiegen"?



## **Beispiel 2**

Frage an Schüler: Warum ist die Überschrift falsch?

#### Oder:

Warum berichten mehr Leute von vollen als von leeren Zügen?

## Fast jeder zweite Sachse lebt allein

Sachsen "versingelt". Hier leben immer mehr Menschen allein. Fast jeder zweite der 4,2 Millionen Einwohner wohnt – statistisch betrachtet – allein in seinen vier Wänden.

#### Haushalte 2007 bis 2009 nach Haushaltsgröße<sup>1)</sup>

Haushalte	2009		
mit Person(en)	1 000	%	
1	944,9	42,6	
2	808,2	36,5	
3	283,4	12,8	
4	143,9	6,5	
5 und mehr	35,2	1,6	

 Bevölkerung in Haushalten 2009 nach Altersgruppen, Geschlecht und Familienstand sowie nach Haushaltsgröße<sup>1)</sup> (in 1 000)

	Insgesamt	In Haushalten mit Person(en)				
Merkmal		1	2	3	4	5 und mehr
					_	_
Insgesamt	4 174,0	944,9	1 616,5	850,3	575,5	186,8

Säcl

Qu



## **Beispiel 3**

## Energiesparen

280 Prozent Strom können leicht gespart werden – beim Kochen, wenn der Deckel nicht vergessen wird. Das ist nur ein Beispiel: So empfiehlt sich etwa bei Speisen mit Garzeiten von mehr als 20 Minuten ein Schnellkochtopf. Damit lassen sich bis zu 50 Prozent Energie und 75 Prozent Zeit einsparen. Grundsätzlich verbrauchen Töpfe mit gewölbtem Boden 50 Prozent mehr Energie als solche mit einem ebenen Boden.

Quelle: Hannoversches Wochenblatt, zitiert nach "Der Spiegel", Nr. 51/1995 (28.12.1995)

Frage an Schüler: Welcher Fehler wurde hier begangen?



## **Beispiel 4**

Eine Studie mit einem neuen Medikament ergibt, dass 50 von 1000 Menschen mit einer schweren Krankheit vollständig geheilt werden können.

Zwei Jahre davor wurde eine ähnliche Studie mit einem älteren Medikament durchgeführt wurde, in der 40 von 1000 Patienten geheilt werden konnten.

## Welche Aussage ist richtig?

- A) Das neue Medikament erhöht die Heilungschancen um 1 %.
- B) Das neue Medikament erhöht die Heilungschancen um 25 %.
- → Was bedeutet "Heilungschancen"?

Aufgabe an Schüler:

Diskutiere die beiden Aussagen! Gibt es eine richtige Aussage?



## Lösung:

Beides ist begründbar! ("Prozentpunkte" vs. "Prozent"; "relativ" vs. "absolut")

- A) 40 von 1000 sind 4 % und 50 von 1000 sind 5 %.
  Es fand also eine absolute Erhöhung von 1 % (10 von 1000) statt.
- B) 10 mehr Geheilte bedeutet auf die 40 Geheilten bezogen aber eine Steigerung um 25 %.
  Es fand also eine relative Erhöhung von 25 % (10 von 40) statt.

Die unterschiedliche Kommunikation von Daten kann also – auch wenn sie beides mal korrekt ist und auch richtig erklärt wird – zu völlig unterschiedlichen subjektiven Bewertungen einer Situation führen.



## **Beispiel 5**





Mögliche Frage: Wo sollte man sich nun aufhalten?

## "28,4 % aller Todesfälle ereignen sich zuhause. Besser, Sie sind nicht da."

Aber: Wenn sich 28,4 % aller Todesfälle zuhause ereignen, ereignen sich 71,6 % aller Todesfälle außer Haus!

#### Sollte man also besser zuhause bleiben?

Die Cinemaxx-Werbung ist deshalb wirkungsvoll, da die meisten von uns den ersten Prozentsatz auf ca. 10 % schätzen würden.

Verglichen dazu ist 28,4 % "erschreckend hoch"!

Unsere Interpretationen von berichteten Prozenten (z. B. Risiken) richten sich also nicht immer nach einem 50 %-Kriterium, sondern oftmals nach dem Vergleich mit einer subjektiv empfundenen Risikoeinschätzung.



## Worum geht es?



- Relevanz von Prozentangaben und Wahrscheinlichkeiten im Alltag und im Lehrplan
- >>> Vorstellung alternativer Darstellungsweisen
- Schwierigkeiten im Umgang mit Prozentangaben und deren Umrechnung
- Didaktische Tipps zur Überwindung häufiger Fehler:
  "Absolute Häufigkeiten" und "Baumdiagramme mit absoluten
  Häufigkeiten"



## Welche Darstellung ist nun empfehlenswert?

Num	ierische Darstellungen	Beispiel
<b>&gt;&gt;</b>	Prozente	25 %
<b>&gt;&gt;</b>	Dezimalbrüche	0,25
<b>&gt;&gt;</b>	Gewöhnliche Brüche	1/4
<b>&gt;&gt;</b>	Absolute Häufigkeiten	1 von 4
<b>&gt;&gt;</b>	"Jeder wievielte"	jeder vierte
<b>&gt;&gt;</b>	Chancenverhältnisse	1 zu 3

Eine Antwort auf diese Frage können empirische Untersuchungen geben ...



1 von 4 Jeder 4. # 25 % 0,25 1/4

## Welche Darstellung ist nun empfehlenswert?

Das "Urteilen unter Unsicherheit" wurde vor allem von den Kognitionspsychologen Amos Tversky und Daniel Kahneman empirisch untersucht.

## "Absolute Häufigkeiten" als didaktisch empfehlenswerte Darstellungsform

Gigerenzer und Fiedler (1988) sowie Gigerenzer und Hoffrage (1995) untersuchten, ob Menschen mit statistischen Informationen besser umgehen können, wenn diese in absolute Häufigkeiten anstatt in Prozenten dargestellt werden (vgl. auch Wassner, 2004; Krauss & Atmaca, 2004).

Betrachten wir zwei Beispiele aus diesen Forschungsprogrammen ...



## **Beispiel 1: Mammografie-Aufgabe**

Mit dem Ziel der Früherkennung von Brustkrebs werden Frauen angehalten, regelmäßig eine Mammografie durchführen zu lassen. Für symptomfreie Frauen im Alter zwischen 40 und 50 Jahren, die eine Mammografie durchführen lassen, liegen folgende Informationen vor:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Frauen Brustkrebs hat, beträgt 1 %.
- Wenn die Krankheit vorliegt, wird sie durch die Mammografie mit einer Wahrscheinlichkeit von **80** % erkannt.
- Jedoch auch gesunde Frauen erhalten mit einer Wahrscheinlichkeit von 9,6 % fälschlicherweise einen positiven Mammografie-Befund.

Eine Frau dieser Altersgruppe erhält nun einen positiven Mammografie-Befund. **Frage:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich an Brustkrebs erkrankt ist? 7,8 %



## Mammografie-Aufgabe (als Häufigkeitsversion)

. . .

Betrachten wir eine Stichprobe von 1000 Frauen.

- >> 10 von 1000 dieser Frauen haben Brustkrebs (statt 1 %).
- >>> 8 von 10 Frauen, die Brustkrebs haben, erhalten einen positiven Mammografie-Befund (statt 80 %).
- >>> 95 der 990 Frauen, die keinen Brustkrebs haben, erhalten dennoch einen positiven Mammografie-Befund (statt 9,6 %).

. . .

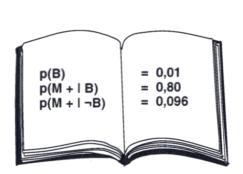
**Frage:** Wie viele der Frauen, die einen positiven Mammografie-Befund erhalten haben, sind tatsächlich an Brustkrebs erkrankt?

\_\_\_\_\_ von \_\_\_\_ (statt einer bedingten Wahrscheinlichkeit)

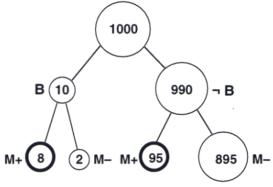


# Vergleich beider Versionen

Wahrscheinlichkeiten

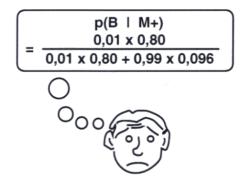






Die meisten Versuchspersonen finden mit einer Häufigkeitsversion die richtige Antwort:

8 von 103 (≈ 7,8 %)



Quelle: Gigerenzer & Hoffrage (1995)



# **Beispiel 2: Linda-Aufgabe**

Linda ist 32, sie hat in Philosophie promoviert und ist ausgesprochen intelligent. Sie ist sozial sehr engagiert und war früher in der Anti-Atomkraft Bewegung aktiv.

Was ist wahrscheinlicher?

- a) Linda ist Bankangestellte.
- b) Linda ist Bankangestellte und in der feministischen Bewegung aktiv.

Die meisten Menschen entscheiden sich für "b)". Aber es gilt allgemein:

$$P(A , und'' B) = P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Und da P immer zwischen 0 und 1:

 $P(A \cap B) < Wahrscheinlichkeit eines jeden Einzelereignisses"$ 



# Linda-Aufgabe (als Häufigkeitsversion)

#### Referenzset

Stellen Sie sich 200 Frauen vor, auf die Lindas Beschreibung passt:

Wie viele davon sind:

- a) Bankangestellte
- b) Bankangestellte und in der feministischen Bewegung aktiv.

Über die Hälfte der Versuchspersonen sagen jetzt:

Die Beschreibung passt auf mehr Personen in Gruppe "a)".

Quelle: Gigerenzer & Fiedler (1988)



# Didaktischer Tipp Nr. 1: Vorteil absoluter Häufigkeiten

Verwenden Sie (auch) absolute Häufigkeiten! Entscheidend an den "absoluten Häufigkeiten" ist, dass die statistische Information mit ihrer Bezugsgröße verbunden bleibt.

In der Häufigkeitsform ist die natürliche Verschachtelung (und somit auch das genaue Referenzset) automatisch explizit gemacht.

- Durch die Wahrscheinlichkeitstheorie gewinnt man mathematisch die Normierung (alles wird auf 1 bzw. 100 % bezogen), verliert jedoch psychologisch die natürliche Vernetzung der Information.
- Durch eine Übersetzung in absolute Häufigkeiten gewinnt man die Vernetzung und somit Verständnis der Situation zurück!

Zusätzlich kann die Visualisierung mit einem Häufigkeits(doppel)baum das Verständnis erleichtern ...



# Didaktischer Tipp Nr. 2: Vorteil von Häufigkeits(doppel)bäumen



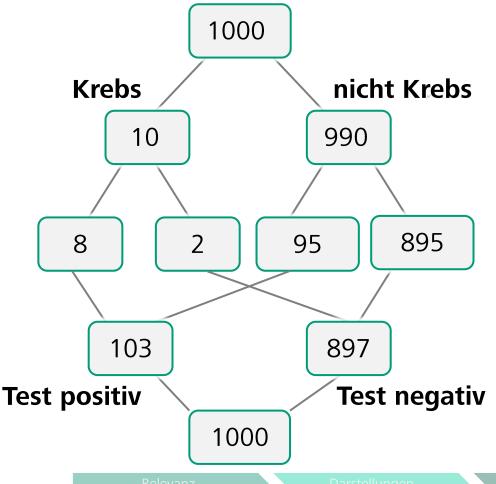
Verwenden Sie Häufigkeitsbäume mit absoluten Häufigkeiten, damit wird klar, was Wahrscheinlichkeits- bzw. Prozentangaben für eine konkrete Stichprobe bedeuten.

Dazu beginnt man mit einer imaginären Stichprobe von 100 oder 1.000 Personen und teilt diese Gruppe sukzessive gemäß den Prozentangaben der Aufgabe auf. Endet man unten nicht mit ganzen Zahlen, lässt sich das durch entsprechende Vergrößerung der Stichprobe leicht erreichen.

Nach einer gewissen Übungszeit gelingt dies auch Schülern leicht und sie sehen die Bedeutung von Prozentangaben!



Didaktisch besonders empfehlenswert: Doppelbaum mit absoluten Häufigkeiten (entspricht der Vierfeldertafel)



- Hierarchische Struktur der Daten wird sichtbar
- "Leserichtung" deutlich
- "Referenzset" deutlich ("Auf was bezieht sich eine Aussage?")
- Relative Häufigkeiten lassen sich bei Bedarf (wie üblich) an den Ästen ergänzen
- Alle relevanten Fragen (z. B. auch nach Anteilen) lassen sich damit beantworten (auch ohne bedingte Wahrscheinlichkeiten!)

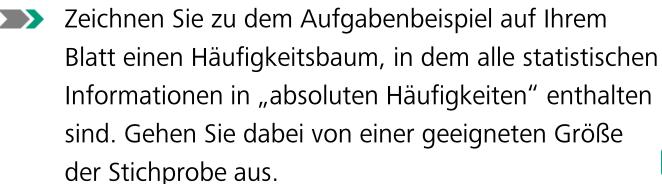
ingen Schwierigkeiten

Didaktische Tipps



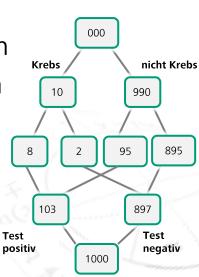
# Workshop-Phase II:

# Visualisierungen statistischer Informationen mittels Häufigkeitsbäumen

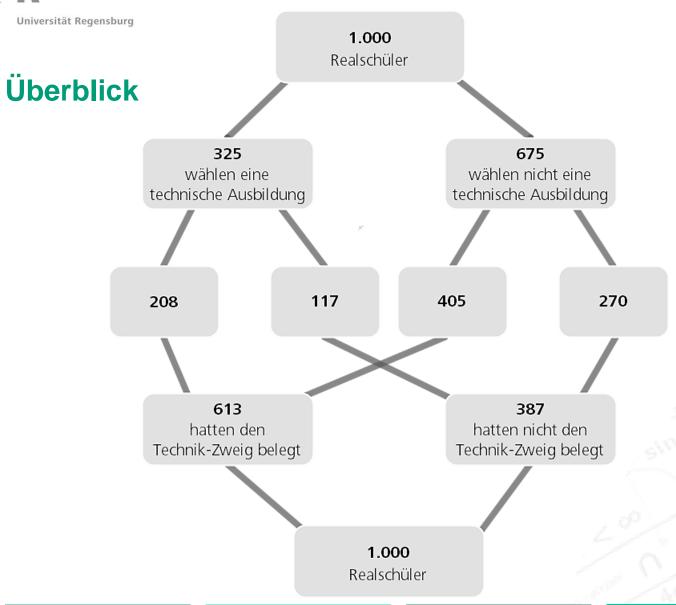


- Ergänzen Sie den Häufigkeitsbaum zu einem Häufigkeitsdoppelbaum.
- Notieren Sie bitte stichpunktartig, was Ihnen auffällt.











# Worum geht es?



- Relevanz von Prozentangaben und Wahrscheinlichkeiten im Alltag und im Lehrplan
- >>> Vorstellung alternativer Darstellungsweisen
- Schwierigkeiten im Umgang mit Prozentangaben und deren Umrechnung
- Didaktische Tipps zur Überwindung häufiger Fehler Das Ziegenproblem: Vielleicht auch mit Häufigkeiten?



# Die berühmteste "Stochastik-Kopfnuss": Das Ziegenproblem



Monty Hall:
Moderator der
US-Fernsehshow
"Let's Make a Deal"







# Das Ziegenproblem in Schulbüchern

#### Das Ziegenproblem

Das Ziegenproblem, auch als "Drei-T schaulichung des Verständnisproblen

#### Das Problem

Bei einer Spielshow soll der Kandidat verbirgt sich der Gewinn, ein Auto, I (oder Trostpreis).



Das Ziegenproblem

31

1 Du bist Teilnehmer einer Fernsehshow. Hinter einem von drei verschlossenen Toren verbirgt sich ein Auto als Gewinn. Hinter den anderen beiden Toren steht jeweils eine Ziege als Niete.

Es gelten folgende Spielregeln:

hinter dem eine Ziege steht. Nun darfst du nochmals die Wahl des

Du wählst das Tor, hinter dem du das

Auto vermutest. Dein Tor bleibt ver-

Anschließend öffnet der Fernsehmo-

derator eines der beiden anderen Tore,

Tores ändern, du musst aber nicht!



a) Diese Fernsehshow lief in den USA unter dem Namen "Let's make a deaf". Monatelang gab es Diskussionen darüber, ob sich die Gewinnchancen verbessern oder nicht, wenn man seine Wahl nach dem Öffnen eines Tores durch den Moderator nochmals ändert.

Marillyn vos Savant - eine Frau mit

dem damals höchsten IQ (Intelligenzquotient) – stellte sich in einer Zeitschrift den Fragen von Lesern.

Auf eine Anfrage von Mr. Craig I. Whitacker aus Columbia antwortete sie am 9. September 1990: "Dear Graig, you should switch. ...."

Ein Dozent einer Universität aus Florida schrieb daraufhin:

"... Whether you change your selection or not, the chances are the same. There is enough mathematical illiteracy in this country, and we don't need the world highest IQ propagating more. Shame." hen Spielshow, "Let's make a Deal": hen Türen. Sie weiß, dass sich hinter einer der drei itos befindet, hinter den beiden anderen Türen jeweils



Die Kandidatin wird aufgefordert, eine Tür auszuwählen, die zunächst geschlossen bleibt. Anschließend öffnet der Moderator der Show, der weiß, hinter welcher Tür das Auto steht, eine der verbleibenden Türen, die die Kandidatin nicht gewählt hat. Er wählt dabei eine Tür aus, hinter der eine Ziege steht.

Bevor die von der Kandidatin gewählte Tür geöffnet wird, kann sie ihre Entscheidung revidieren, d.h., sie kann statt der zuerst gewählten Tür die noch verbliebene, geschlossene Tür nehmen.

Die nun endgültig von der Kandidatin gewählte Tür wird geöffnet, der dahinterstehende Preis (Auto oder Ziege) übergeben.

der anfangs gewählten Tür zu bleiben, die Tür zu wechb man wechseit oder nicht?

Quelle: Mathematik 9, Westermann, S. 232

**Quelle:** Lernstufen Mathematik 10, Cornelsen, S. 160 **Quelle:** Lambacher Schweizer 11, Klett, S. 190



# Ein Leserbrief an das Parade Magazine (1991)

Stellen Sie sich vor, Sie nehmen an einer Spielshow teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den anderen beiden stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir Nummer 1. Sie bleibt vorerst geschlossen.

Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet. Mit den Worten "Ich zeige Ihnen mal was" öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer 3, und eine Ziege schaut ins Publikum.

## Er fragt:

"Bleiben Sie bei Tür Nummer 1, oder wechseln Sie zu Tür Nummer 2?"

Wie sollten Sie sich als Kandidat entscheiden?



# **Marylin vos Savant**



- Autorin der Kolumne "Ask Marylin" im Parade Magazine
- Leser durften alles fragen, was sie wollten und Marilyn bemühte sich um eine Antwort.
- Marilyn vos Savant war zu dieser Zeit im Guinness Buch der Rekorde als der "intelligenteste Mensch" aufgeführt (IQ = 228).

#### Sie antwortet:

"Ja, Sie sollten wechseln.

Tür 1 hat eine 1/3- Chance auf den Gewinn, aber Tür 2 hat eine 2/3-Chance."



#### Leserbriefe



"Das ist ja wohl ein Riesenschnitzer! Da Sie offensichtlich das Grundprinzip nicht sehen, erkläre ich das mal: Nachdem der Moderator eine Ziegentür geöffnet hat, ist die Chance auf das Auto 1 zu 2. Ob man jetzt die Tür wechselt oder nicht, die Chance auf das Auto bleibt gleich. Es gibt genug mathematisches Analphabetentum in diesem Land, wir brauchen nicht den höchsten IQ der Welt um noch mehr davon zu verbreiten! Schande!"

Scott Smith, Ph. D. University of Florida



### Leserbriefe



"Vielleicht lösen Frauen Mathematikprobleme ja anders als Männer?"

Don Edwards, Sunriver, Oregon

"Sie sind die Ziege!"

Glenn Calkins Western State College



# ... und Marilyn

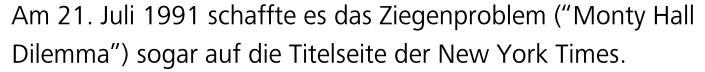
"Uff! Wenn diese Kontroverse andauert, passt bald nicht mal mehr der Postbote ins Postamt. Ich erhalte Tausende von Briefen und nahezu alle insistieren, dass ich falsch liege, darunter leitende Direktoren und Statistiker aus der angewandten Forschung [...].

Aber mathematische Wahrheiten werden nicht durch Abstimmungen entschieden."



# Marilyn

Insgesamt erhielt Marilyn über 10.000 Briefe. Manche Leserbriefschreiber waren sich so sicher, dass sie sogar Wetten über \$20,000 anboten.



Statt auf die Wetten einzugehen, beschloss Marilyn vos Savant die explodierende Debatte in einem Buch zu veröffentlichen: "The Power of Logical Thinking" (1997)



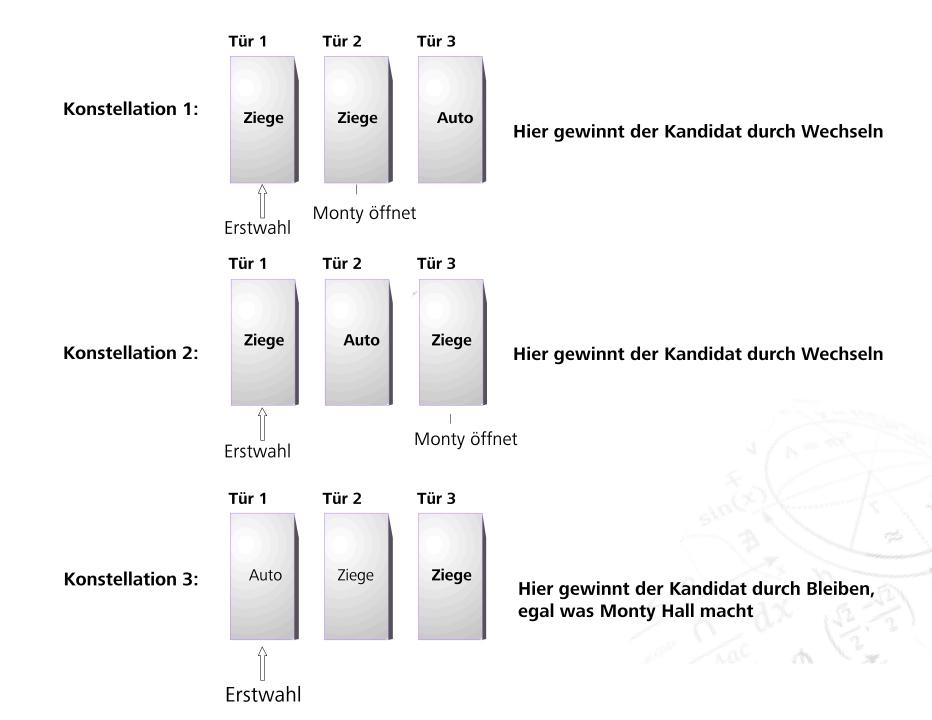


# "Die Königin der kognitiven Täuschungen"

"Das Phänomen ist vor allem deshalb so interessant, da es beliebig reproduzierbar und scheinbar auch immun gegen höhere Bildung ist [...] sogar nobelpreisgekrönte Physiker geben systematisch die falsche Antwort [...] und insistieren auf ihrem Irrtum, und beschimpfen sogar öffentlich diejenigen, die die richtige Lösung vertreten." (Massimo Piattelli-Palmarini)

"Das Ziegenproblem ist der endgültige Beweis dafür, dass unsere Gehirne nicht richtig verdrahtet sind, um Wahrscheinlichkeitsaufgaben zu lösen."

(Persi Diaconis)





## Stelle die Zwischenfrage (als Häufigkeitsfrage!):

"In wie vielen der drei möglichen Auto-Ziege-Konstellationen würde der Kandidat durch Bleiben gewinnen und in wie vielen würde er durch Wechseln gewinnen?"

## ... und dann erst die Frage:

"Was sollte der Kandidat also tun?"

→ 60 % der Versuchspersonen wechseln, sogar 7.-Klässler können die richtige Antwort geben und begründen!

Krauss & Atmaca (2004)



# Illustrationen des Ziegenproblems in Schulbüchern

#### Auftrag 2

Diskutiert die Argumente in der Klasse. Warum sind sie nicht richtig?

#### Die "Immer-Wechsel"-Strategie

Wir durchleuchten die Möglichkeiten bei der beschriebenen Strategie:



Fazit: Er gewinnt in zwei von drei Fällen durch einen Wechsel.

Quelle: Lernstufen Mathematik 10, Cornelsen, S. 161



# Zusammenfassung



- Prozentangaben und Wahrscheinlichkeiten tauchen im Alltag und den Medien sehr häufig auf und werden im Lehrplan schulformübergreifend umfangreich behandelt.
- >>> viele alternative Darstellungsweisen von Wahrscheinlichkeiten
- >>> viele Hürden und Fehler bei der Umrechnung verschiedener Darstellungsweisen ineinander
- >>> didaktischer Vorschlag: Verwendung von ...
  - ... absoluten Häufigkeiten (statt Prozenten)
  - ... Häufigkeits-(doppel-)bäumen zur Visualisierung



# Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!





#### Literatur zum Häufigkeitskonzept (aus der Didaktik):

Krauss, S. (2003). Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann: Das "Häufigkeitskonzept". *Stochastik in der Schule, 23, 1,* 2-9.

Martignon, L., Atmaca, S. & Krauss, S. (2001). Wie kann man Wahlergebnisse und AIDS-Risiken intuitiv darstellen? Ein Kommentar zu den Beiträgen von Hildebrand und Quermann. *Stochastik in der Schule, 21, 1,* 11-12.

Krauss, S. & Hertwig, R. (2000). Muss DNA-Evidenz schwer verständlich sein? Der Ausweg aus einem Kommunikationsproblem, *Monatsschrift für Kriminologie und Strafrechtsreform*, *3*, 155-162.

Krauss, S. (2001). Wahrscheinlichkeit und Intuition – 2 Seiten einer Medaille? In: Borovcnik, M., Engel, J. & Wickmann, D. (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastik-unterricht: Die NCTM-Standards 2000, Klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich*. Hildesheim: Franzbecker, 139-146.

Wassner, C., Krauss, S. & Martignon, L. (2002). Muss der Satz von Bayes schwer verständlich sein? *Praxis der Mathematik, Heft1/44*, 12-16.

#### **Literatur zum Ziegenproblem:**

Atmaca, S. & Krauss, S. (2001). Der Einfluss der Aufgabenformulierung auf stochastische Performanz – Das "Drei-Türen-Problem". In: Stochastik in der Schule, 21, 3, 14-21.



#### Literatur zur Stochastik bzw. Statistik (mit vielen reellen Beispielen z. B. aus Medien):

Borovcnik, M., Engel, J., Wickmann, D.: Anregungen zum Stochastikunterricht, Die NCTM-Standards 2000, Klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich, Hildesheim/Berlin 2001.

Dewdney, A. K.: 200 Prozent von nichts, Basel/Boston/Berlin 1994.

Dubben, H.-H., Beck-Bornholdt, H.-P.: Der Hund, der Eier legt, Hamburg 2010.

Dörner, D.: Die Logik des Mißlingens, Hamburg 1989.

Eichler, A., Vogel, M.: Leitidee Daten und Zufall, Wiesbaden 2009.

Fischer, G.: Stochastik einmal anders, Wiesbaden 2005.

Gigerenzer, G.: Das Einmaleins der Skepsis, Berlin 2002.

Gigerenzer, G., Swijtink, Z., Porter, T., Daston, L., Beatty, J., Krüger, L.: Das Reich des Zufalls, Heidelberg/Berlin 1999.

Hauser, B., Humpert, W.: Signifikant? Einführung in statistische Methoden für Lehrkräfte, Zug 2009.

Herget, W. (Hrsg.): Wege in die Stochastik (mathematiklehren, Sammelband), Seelze 2008.

Knöpfel, H., Löwe, M.: Stochastik – Struktur im Zufall, München/Wien 2007.

Krämer, W.: Denkste! Trugschlüsse aus der Welt des Zufalls und der Zahlen, Frankfurt am Main/New York 1996.

Krämer, W.: So lügt man mit Statistik, Frankfurt am Main/New York 1998.

Krämer, W.: Statistik verstehen, Frankfurt am Main 2010.